

DASOMETRIA

CIENCIA DE LA MEDICIÓN FORESTAL

**Francisco Ramón López Serrano
Francisco Antonio García Morote
Antonio del Cerro Barja**

DASOMETRIA

CIENCIA DE LA MEDICIÓN FORESTAL

Francisco Ramón López Serrano
Profesor Titular de Dasometría e Inventario de Montes
Departamento de Ciencia y Tecnología Agroforestal
E.T.S.I. Agrónomos de Albacete

Francisco Antonio García Morote
Profesor Asociado de Dasometría y Ordenación de Montes
Departamento de Ciencia y Tecnología Agroforestal
E.T.S.I. Agrónomos de Albacete

Antonio del Cerro Barja
Catedrático de Universidad de Ordenación y Valoración de Montes
Departamento de Ciencia y Tecnología Agroforestal
E.T.S.I. Agrónomos de Albacete

ISBN 84-932789-3-9



9 788493 278939

POPULAR
LIBROS

Octavio Cuartero, 17. Albacete. Tl.: 967 22 58 63

Este libro no podrá ser reproducido sin permiso del autor.
Todos los derechos quedan reservados.

© López Serrano, Francisco Ramón
García Morote, Francisco Antonio

© De esta edición:
POPULAR LIBROS
Octavio Cuartero, 17
02003 Albacete
Teléfono 967 225 863
Fax 967 230 835

I.S.B.N. 84-932789-3-9

Depósito Legal: AB-438-2003

Imprime: Gráficas Antar, S. L.

PROLOGO

La "Dasometría" clásica ha tratado siempre la medición de los árboles y de las masas forestales, pero la mayoría de las veces se ha centrado únicamente en la cubicación, esto es, en la estimación del volumen de maderas y del crecimiento de esta variable, tanto a nivel árbol como a nivel masa. Así, y aunque existen muy buenas publicaciones en esta materia, tanto en la lengua castellana como en la francesa y anglosajona, casi todas ellas creemos presentan un enfoque excesivamente clásico, que hace que no tengan aplicación a las nuevas necesidades que actualmente plantea la sociedad en relación al medio ambiente, más aún si cabe en nuestras masas, típicamente mediterráneas.

Por otro lado, la Dasometría siempre ha sido, y todavía lo es, la base fundamental de otras disciplinas propias de los ingenieros forestales, como son el inventario de montes, la ordenación de montes, la selvicultura, la valoración de montes, etc. Por tanto, si las necesidades o los problemas a resolver en éstas cambian, la Dasometría debe ser capaz de aportar las herramientas necesarias para estos cambios.

El enfoque que se ha pretendido en esta publicación combina ambos aspectos, pues por un lado se incluyen los conceptos clásicos de la Dasometría (necesarios como base para entender la disciplina) y, por otro, aquellos referentes a la medición de parámetros altamente correlacionados con la función protectora y ecológica de los bosques, inusuales hasta hace pocos años. Pero es más, se tratan temas que hasta el momento tampoco despertaban excesivo interés, como por ejemplo la medición de los montes bajos de coscoja o encina, masas tan importantes en nuestros ecosistemas.

Además, con este libro orientado fundamentalmente a la formación de los estudiantes de Dasometría (tanto del primer como del segundo ciclo de Ingeniería T. Forestal o de Montes), se ha pretendido incluir las nuevas tendencias de la Dasometría, teniendo en cuenta los avances en la estadística y en el software de tratamiento de variables, que permitirán solucionar muchos de los desafíos que conlleva el tener que manejar un gran volumen de datos.

Por ello se ha tratado de, en la medida de lo posible, desarrollar los Capítulos de esta obra bajo una perspectiva matemático-estadística, que sirva de ayuda en la toma de decisiones, como por ejemplo, la elección y/o construcción de relaciones alométricas para la estimación de parámetros forestales. Esto, desde nuestro punto de vista, resulta crucial para el futuro ingeniero (forestal o de montes), pues será el matiz que diferenciará a estos profesionales, y sobre todo, les permitirá tomar decisiones científicamente argumentadas, huyendo de recetas que tradicionalmente se han aplicado y que no siempre estaban bien fundadas. A la vez, les fomentará la autocrítica y la capacidad de evaluar los trabajos forestales desde enfoques más sólidos y científicos.

Albacete, mayo de 2003
LOS AUTORES

TEMA I. INTRODUCCIÓN A LA DASOMETRÍA

- I. DEFINICIÓN. PARTES DE QUE CONSTA LA DASOMETRÍA. OBJETIVOS
 - II. LA ENSEÑANZA DE LA INGENIERÍA FORESTAL: EVOLUCIÓN DE LA ENSEÑANZA DE LAS DISCIPLINAS FORESTALES Y ANTECEDENTES HISTÓRICOS DE LA ASIGNATURA
 - III. UNIDADES DE MEDIDA. REPASO DE CONCEPTOS RELACIONADOS CON LAS MEDICIONES FORESTALES
 - IV. ERRORES
 - V. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS
-

1.- DEFINICIÓN. PARTES DE QUE CONSTA LA *DASOMETRÍA*. OBJETIVOS

1.1. DEFINICIÓN

La **Dasometría** es una rama de la *Dasonomía* (ciencia que trata del cultivo, conservación y aprovechamiento de los montes) que se ocupa de la medición de los árboles y de las masas forestales, así como del estudio de las relaciones métricas y leyes que rigen su evolución (PITA, 1979). La **Dasonomía** es una ciencia que engloba a las siguientes disciplinas forestales: *Dasometría*, Ordenación de Montes (o *Dasocracia*), Selvicultura, Botánica Forestal y Ecología Forestal.

Otros autores han realizado diferentes definiciones del término *Dasometría*:

- ✓ GRAVES (1906): la *Dasometría* trata de la determinación del volumen de trozas, de árboles y de las masas de árboles, así como del estudio del crecimiento y de la producción
- ✓ HUFFEL (1919): la *Dasometría* nos enseña a determinar el volumen de los productos del monte
- ✓ PRODAN (1951): la *Dasometría* trata de medir y cuantificar las magnitudes que definen el contenido, la forma y el crecimiento de los árboles y de las masas
- ✓ MEYER (1957): la medición forestal comprende la medida de los productos del monte, la determinación del volumen de madera de construcción y del crecimiento del monte

Las primeras definiciones dadas de *Dasometría* hacen referencia fundamentalmente a la medida de la madera. Esto es debido a que en un principio el origen de las medidas se encaminó a la cubicación de este producto. Sin embargo, los problemas actuales que han surgido en el campo forestal a consecuencia del desarrollo económico y social, han dado un nuevo enfoque en la consideración del bosque. Este nuevo enfoque no es sino el concepto de *uso múltiple*, el cual incluye tanto al aspecto recreativo, como al protector (manejo de cuencas hidrológicas, gestión de la fauna salvaje) y productor.

Por ello, aunque mantendremos como aspecto fundamental a estudiar la madera, las técnicas descritas en esta asignatura (basadas en el cálculo matemático y en la Estadística), podrán ser utilizadas con ligeras modificaciones, para estimar cualquier recurso forestal susceptible de ser medido.

Así más recientemente, HUSCH, MILLER and BEERS (1982) definen la **Dasometría** como "la aplicación de los principios de las mediciones con el fin de obtener información cuantificable para poder tomar decisiones".

La palabra *Dasometría* deriva de un neologismo griego formado por dos vocablos, "da-sos", bosque y "metreo", medida, que significa *medida del bosque*.

La denominación dada a esta ciencia en otros países es:

- ✓ "Forest mensuration" en los países anglosajones
- ✓ "Holzmesskunde" o "Messung der Waldbestände" en Alemania
- ✓ "Dendrométrie" en Francia
- ✓ "Dendrometría" en Italia

1.2. PARTES DE QUE CONSTA LA DASOMETRÍA

La *Dasometría* consta de tres partes o subdisciplinas a las que engloba:

1. **Dendrometría:** tiene como primer objetivo la medida de las dimensiones del árbol, el estudio de su forma y la estimación de su volumen o, si procede, de su biomasa.
2. **Esteriometría** (*Dasometría* propiamente dicha): trata de la cuantificación métrica de las masas forestales, esto es, caracterizar la distribución diamétrica, estimación de volumen, número de pies y áreas basimétricas de dichas masas, entendidas como conjunto de árboles.
3. **Epidometría:** estudia las técnicas de medición y las leyes que regulan el crecimiento y producción de los árboles y masas forestales.

La *Dasometría* a su vez también está relacionada con otras materias y disciplinas de las que necesita sus bases y teorías, siendo las más importantes las siguientes:

- ✓ Matemáticas, de la que necesita los métodos de cálculo numérico y álgebra lineal
- ✓ Estadística Matemática, que proporciona a la *Dasometría* el conocimiento de las principales distribuciones de probabilidad de tipo continuo y discreto, así como los principales métodos de análisis univariante y multivariante.
- ✓ Anatomía Vegetal, aporta las bases del estudio y descripción de los órganos del árbol (raíz, tronco, ramas, hojas) y de los tejidos, sobre todo el de los leñosos, los caules son básicos para comprender muchos conceptos de *Dasometría*.
- ✓ Fisiología Vegetal, para decidir por ejemplo, cual es la época apropiada para efectuar el descorche en los alcornocales o para entender todo el complejo proceso del crecimiento del árbol y de la masa forestal (Epidometría).
- ✓ Dendrología, que trata de la identificación y clasificación sistemática de los árboles, está muy relacionada con la Dendrometría.

Además la *Dasometría* es una de las bases fundamentales del Inventario y de la Ordenación de Montes, pues sirve para caracterizar el Estado Forestal del monte (figura 1.1). Por todo ello, la *Dasometría puede ser considerada como la disciplina base de la ciencia forestal*. Esta ciencia forestal, en el más amplio sentido de la palabra, es una actividad de gestión que envuelve a las masas forestales, las plantas y animales que allí se encuentran y también al hombre, si es que éste usa el monte. De esta manera el forestal se enfrenta con el gran problema de tomar decisiones en la gestión forestal, ya que estas decisiones afectarán a todo el entramado anterior. Para tomar decisiones inteligentes es imprescindible tener información, a ser posible cuantitativa, de todo lo concerniente al bosque, tanto de plantas, animales como del uso por parte del hombre que de él se realiza, y esto es lo que hace entre otras cosas la *Dasometría*.

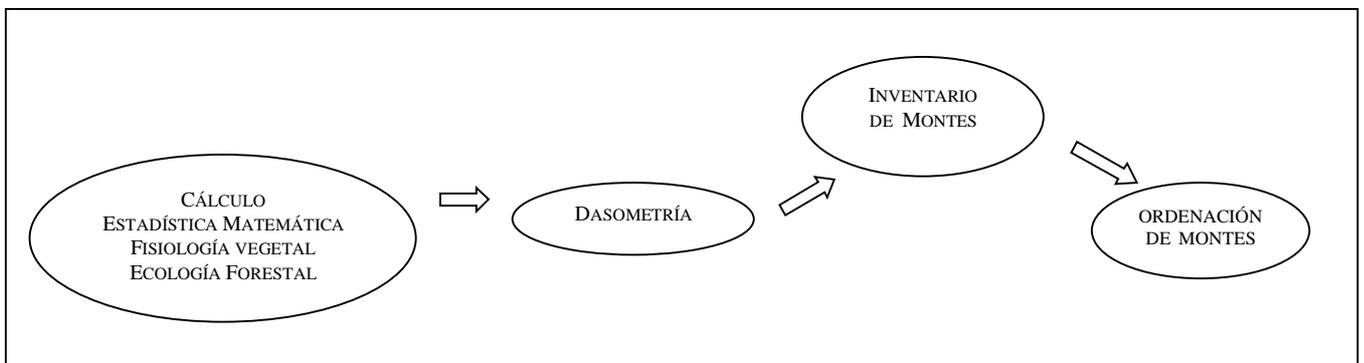


Figura 1.1. La Dasometría y su relación con el resto de ciencias y disciplinas forestales

1.3. OBJETIVOS FUNDAMENTALES DE LA DASOMETRÍA

El objetivo fundamental de esta disciplina es proporcionar al técnico forestal los conocimientos suficientes para que pueda describir y cuantificar los recursos maderables (y no maderables) de una determinada masa forestal y, en consecuencia, obtener el Estado forestal de los inventarios que figuran en los proyectos de Ordenación de Montes.

Se pueden establecer además como objetivos generales los siguientes:

DENDROMETRIA

1. Elegir las fórmulas de cubicación más apropiadas para la cubicación comercial de árboles apeados.
2. Saber emplear las fórmulas de cubicación real de árboles, eligiéndolas según la precisión deseada.
3. Aplicar adecuadamente las fórmulas de cubicación de madera delgada, leñas y cortezas.
4. Conocer el efecto de la densidad de la masa y de los tratamientos selvícolas y culturales en la forma del tronco de los árboles.
5. Calcular aproximadamente los coeficientes mórficos de los troncos.

ESTEREOMETRIA DE LA MASA

1. Conocer y emplear los métodos estadísticos que se utilizan en *Dasometría*.
2. Calcular y representar las distribuciones diamétricas de las masas forestales.
3. Calcular las relaciones alométricas más útiles para la estimación de parámetros dasométricos.
4. Conocer y aplicar los principios de la *Dasometría* relascópica para calcular el área basimétrica y el número de pies por ha de los bosques.
5. Calcular y aplicar tarifas y tablas de cubicación para la determinación del volumen maderable de una masa forestal.

EPIDOMETRIA

1. Conocer y aplicar los procedimientos más usuales empleados en la determinación de las edades de los árboles y de los bosques.
2. Conocer las fórmulas que se usan para el cálculo de los crecimientos absolutos y relativos de los árboles y de las masas forestales.
3. Calcular los crecimientos en diámetro, en altura, en área basimétrica y en volumen de los árboles y de los bosques.

2.- LA ENSEÑANZA DE LA INGENIERÍA FORESTAL: EVOLUCIÓN DE LA ENSEÑANZA DE LAS DISCIPLINAS FORESTALES Y ANTECEDENTES HISTÓRICOS DE LA ASIGNATURA

2.1.- EVOLUCION DE LAS ENSEÑANZAS DE LAS DISCIPLINAS FORESTALES

A finales del siglo XVII comenzó en algunos Estados de Alemania la aplicación de los conocimientos técnicos al tratamiento de las masas arbóreas. En el siglo XVIII nace en Alemania la llamada Ciencia Forestal. Así, en 1770, el profesor Gleditsch comenzó a dar clases de Botánica Forestal en la Universidad de Berlín. La primera escuela que enseñó ciencia forestal fue la Kameralhochschule de Kaiserslautern (Palatinado), donde a partir de 1778, el profesor Jung-Stilling, médico de profesión e íntimo amigo del poeta Goethe, tuvo a su cargo esta asignatura. En la Universidad de Freiburg (Selva Negra) hubo a partir del año 1787 una cátedra de Montes regentada por el profesor Trunk.

Al mismo tiempo (1732-1795), se abren en Alemania varias escuelas privadas para la preparación de expertos forestales, derivadas de la necesidad de realizar y aplicar planes de aprovechamientos ordenados en bosques de importancia. Destacan las patrocinadas por Hartig en Hungen (1791) y por Heinrich von Cotta en Zillbahr, siendo esta última en 1795 reconocida por el estado y trasladada a Tharandt (Sajonia). En 1811 Cotta dirigió la Ordenación Forestal. La escuela de Cotta tomó tanta fama en aquella época que fue el eje de otras escuelas forestales en Europa, entre ellas las de Austria, Rusia, Francia y España.

El proceso de Austria fue similar, aunque algo más retrasado, al de Alemania, mientras Rusia inició el proceso directamente bajo el patrocinio del Imperio. En Francia la primera

Escuela importante, creada bajo el modelo de Tharandt, fue la de Nancy, que en la actualidad continua impartiendo estos estudios.

Ya en nuestro país, el origen de la disciplina y de las enseñanzas forestales está relacionado con la preocupación surgida en el siglo XIX en la sociedad española por el progresivo deterioro y destrucción de las masas forestales.

En la Historia de España no es escasa la aparición de Disposiciones, Reales Cédulas y Ordenanzas encaminadas a defender y proteger los bosques, aunque lamentablemente casi nunca fueron aplicadas con eficacia. Ya desde la Edad Media y hasta el siglo XIX, las guerras por la Reconquista, el pastoreo abusivo por millones de cabezas de ganado ovino y caprino, y el gran auge experimentado por la Marina española (que necesitaba grandes cantidades de madera para construir sus barcos) degeneró en la pérdida de ingentes cantidades de masas arboladas en España.

La destrucción de nuestros bosques continúa durante la primera mitad del siglo XIX, período que se iniciará además con las más penosas consecuencias en nuestros montes de las políticas liberales y reformadoras, que propiciaron que gran parte de los montes públicos y eclesiásticos pudieran ser adquiridos por particulares, y a precios baratísimos, para su posterior puesta cultivo agrícola.

La Desamortización, es decir, la política de venta de terrenos públicos a particulares, comenzó en las Cortes de Cádiz en el año 1.812. La ley de Mendizábal (1.837) profundizó en esas reformas liberales, habiéndose previsto que las tierras eclesiásticas (la mayoría de ellas magníficos bosques, dehesas y pastos) fueran a manos de los agricultores, siguiendo el ejemplo de la Revolución Francesa. No obstante, la mayoría de los agricultores no eran lo suficientemente pudientes para comprar las fincas, lo que propició que la burguesía se aprovechara de esas ventas consiguiendo enormes latifundios con pocos esfuerzos económicos.

La superficie forestal adquirida era inmediatamente roturada por el nuevo propietario para dedicarla a cultivo agrícola. Los primeros años eran de muy buenas cosechas debido al descanso que habían tenido las tierras durante siglos, pero muchas de ellas quedaron agotadas al cabo de los años, convirtiéndose en arenales estériles.

A estas medidas tan negativas para los montes, se suman dos Reales Órdenes elaboradas durante el gobierno de Mendizábal: en 1.834 se declara que en los montes particulares podría ser introducido libremente el ganado del propietario, o de cualquier ajeno, propiciándose toda clase de abusos pastoriles, y en 1.835 se autoriza a los ayuntamientos para que vendan en pública subasta los terrenos de propios que creyeran oportuno, estableciéndose como disposición que el monte alto existente debería ser talado.

Estas Ordenes eran absolutamente contrarias al deber del Estado de conservar montes y suelo; por ello, y debido a la iniciativa de varios sectores de la sociedad para conservar los montes del destrozo al que se les estaba sometiendo, fue prevista la fundación ese mismo año de un Cuerpo de Ingenieros de Bosques, cuya misión sería proporcionar el personal técnico necesario para la conservación de los bosques, y para su formación una escuela especial del ramo en Madrid: el Real Decreto de 30 de Abril de 1835 insta a la creación de una "Inspección

de Bosques", recomendando también la creación de una Escuela de "Ingenieros de Bosques"; no obstante, la Guerra Carlista paralizó su ejecución.

A otro segundo intento producido en 1843, siguió el definitivo, pues según Real Orden de 10 de Enero de 1847, se crea la Escuela de Villaviciosa de Odón (Madrid) bajo la Dirección del Excmo. Sr. D. Bernardo de la Torre Rojas, con la denominación de "*Escuela Especial de Ingenieros de Montes*" y con un programa académico que duraba cuatro años. Poco después, en 1853 se crearía el *Cuerpo de Ingenieros de Montes*, y en 1859 la Escuela Práctica de El Espinar (Segovia).

La enseñanza forestal española tiene su base en la alemana, pues los primeros profesores de la Escuela de Montes se formaron en las escuelas de ese país. Para la dotación del primer profesorado de la Escuela, y por indicación de Agustín de Argüelles (embajador español en Londres y Lisboa), fueron enviados D. Agustín Pascual (Secretario de Agricultura) y D. Esteban Boutelou (viceprofesor de Botánica de la Universidad de Sevilla) a la Escuela Forestal de Tharandt, en Sajonia (Alemania), con el compromiso de completar sus estudios forestales y a la vuelta trabajar al menos 5 años para la Casa Real.

A su vuelta de Alemania, Agustín Pascual González obtuvo el título de Inspector General de Bosques, y fue el primer profesor de Selvicultura de la Escuela creada. Además gestionó los montes de El Pardo, Riofrío y San Ildefonso, llegando en su vida profesional a lo más alto de la Administración forestal española; sus obras atestiguan que fue el forestal más famoso de su tiempo, pudiendo ser reconocido como el padre de la ciencia forestal española.

La creación de la Escuela y del Cuerpo de Montes fue por tanto, vital para salvar los montes públicos de su destrucción. En 1855, ante la posibilidad de ejecutarse una nueva ley reformadora, la llamada Ley Madoz, que versaba sobre la venta de todos los montes públicos a particulares, D. Bernardino Núñez de Arenas (director de la Escuela de Ingenieros de Montes) secundado por los profesores Ingenieros D. Lucas Olazábal y D. Indalecio Mateo, publicaron en forma de libro sus cartas dirigidas al Ministerio de Fomento sobre la necesidad imperiosa de conservar los bosques públicos. Esta medida tuvo éxito, ya que por la 5ª Ley de Madoz el Cuerpo de Ingenieros de Montes recibió el encargo de proponer los montes que creyera oportuno vender y los que no. Además sería preciso realizar un detallado inventario forestal, supervisado por un Ingeniero de Montes y un agrimensor, con investigación y reseña adicional de clima, suelo y vuelo del monte, mencionando la influencia de cada monte sobre la salubridad del país y el régimen de las aguas.

Terminado ese inventario, el monte era clasificado en una de las tres categorías propuestas por los Ingenieros D. Bernardino de la Torre Rojas (fundador de la Escuela) y D. Agustín Pascual, categorías recogidas en su obra "*Memoria sobre los bosques españoles*", primer y gran trabajo sobre las masas forestales españolas. Poco después en 1859, por fin se realizaría la "*Clasificación General de los Montes Públicos*", impulsada por el Ministro de Fomento, el Marqués de Corvera, en estrecha colaboración con el Cuerpo.

Afortunadamente, supo comprender el ministro la gravedad de la situación de los montes españoles, y que una correcta gestión de los montes únicamente podría ser realizada por los Ingenieros de Montes de la Escuela. Por ello, y en el brevísimo período de 3 meses,

fueron clasificados por personal del Cuerpo y subalterno los montes públicos de todas las provincias españolas; recorriendo los montes, a pie o a caballo, se realizó lo que sin duda constituye la primera estadística forestal hecha en España, en la que se expone para cada municipio sus montes, su denominación, su cabida y las especies dominantes y subordinadas que en él se desarrollaban.

Este excepcional trabajo vino a llamarse "*Clasificación General de los Montes Públicos hecha por el Cuerpo de Ingenieros de Montes*", y en él se detallan los montes enajenables y aquellos exceptuados de venta, por su importancia en la conservación del medio. Muchas de nuestras mejores masas forestales actuales deben su salvación a esta clasificación, y en definitiva, a la labor profesional de los primeros Ingenieros de Montes de la Escuela creada en España, que supieron proteger y conservar los bosques en beneficio del país.

A partir de 1.875 se intenta consolidar la administración forestal, sustituyéndose los antiguos jueces de montes por Ingenieros de Montes, y continua activa la lucha por la conservación de la riqueza silvícola de la nación hasta finales de siglo. Esta lucha concluye finalmente con la llegada al trono del rey Alfonso XII: el joven rey era un entusiasta de la naturaleza (en propias palabras afirmó que "*si yo hubiera de seguir una carrera, elegiría la de Ingeniero de Montes*"), y supo activar la defensa de los bosques propiciando que se pudieran poner en marcha las primeras repoblaciones y ordenaciones de montes.

Así, en el año 1.887 se aprueban las *Instrucciones para el Servicio Forestal*, se crean las *Inspecciones Generales* y las secciones y comarcas forestales, y la *Comisión Revisora del Catálogo de Montes de Utilidad Pública*, que recoge los montes que no se podían enajenar y que debían conservarse para protección de suelo y paisaje. En 1.888 se crean quince viveros y almacenes de semillas forestales para fomentar la repoblación, decidiéndose el inicio ese mismo año de la repoblación de las cabeceras hidrológicas de las cuencas de España. Los resultados fueron tan eficaces, que en 1.901 se crea el *Servicio Hidrológico Forestal*, para repoblar y corregir los torrentes y cabeceras de ríos. El hecho de que hoy en día se haya disminuido la erosión en algunas cuencas se debe a la actuación de este Servicio.

Es precisamente en esta etapa cuando se inicia la ordenación forestal, recibiendo la base científica en el libro "*Ordenación y Valoración de Montes*", del profesor D. Lucas Olazábal, del año 1.884. Las primeras Instrucciones referentes a los planes de ordenación aparecen recogidas en Real Decreto de 17 de mayo de 1.865. La primera ordenación de montes la realizó José Jordana en 1.858 con el Proyecto de Ordenación de los montes de Paterna de Madera (Albacete). El éxito del trabajo hace que se funde en 1.890 un servicio para la ordenación de los diferentes distritos forestales, continuándose los trabajos con la ordenación de los montes de la Sierra de Segura (Jaén-Albacete) y de la Serranía de Cuenca. Las instrucciones de ordenación aportadas por Lucas Olazábal y José Jordana eran tan perfectas que no hubo necesidad de modificarlas hasta 1.930.

La Ordenación de Montes fue el medio de impulsar la Selvicultura en España, y el Gobierno la consideró tan importante que la incluyó en el primer grupo de obras públicas a ejecutar, juntamente con caminos, puertos y canales. Se ordenaron grandes masas maderables, montes productores de resina y alcornoques. En el año 1.879 se promulga la Ley de Caza, en

1.888 una disposición para la repoblación y fomento de pesca de agua dulce, y poco después el Servicio de Plagas Forestales.

Desde su fundación, los requisitos de acceso a la Escuela de Montes y las materias impartidas fueron modificándose, al ritmo marcado por el progreso de la ciencia y de la técnica. Como curiosidad, en 1.870 al trasladarse la Escuela a San Lorenzo de El Escorial (Madrid) era necesario para el ingreso haber aprobado las materias de Gramática latina y castellana y Geografía e Historia de España; la enseñanza duraba 3 años teóricos mas un cuarto año práctico a realizar en un Distrito Forestal.

En 1894 la carrera se aumentaba a 5 años, y en 1914 se ubica la Escuela de Montes en diversos locales de Madrid, con duración de 6 años, para instalarse en 1946 en su definitiva y actual sede en la Ciudad Universitaria, siendo su artífice y primer Director el Excmo. Sr. D. Pío García-Escudero. Actualmente la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Montes está integrada en la Universidad Politécnica de Madrid.

La profesión de Ingeniero Técnico Forestal es más reciente, y se origina a partir del Cuerpo de Auxiliares Facultativos de Montes, al que se accedía por oposición regulada mediante el Reglamento de 24 de Abril de 1905. En 1943, por Decreto de 10 de Febrero, se establecen las normas de ingreso en el Cuerpo de Auxiliares Facultativos mediante un examen de Ingreso, dos cursos de nueve meses y un período de prácticas con trabajos de campo. Esta fórmula de ingreso en el Cuerpo dio lugar a la denominación de Ayudantes de Montes.

Medio siglo después de la creación del Cuerpo de Auxiliares Facultativos de Montes, la Ley de Ordenación de las Enseñanzas Técnicas de 20 de Julio de 1957 dio origen a la Escuela de Peritos de Montes. Mediante O.M. de 29 de Noviembre de 1957 (B.O.E.) de 6 de Diciembre, se implantaron los cursos Preparatorio y Selectivo para el ingreso en dicha Escuela. Por Orden de Julio de 1959 se fijan las asignaturas del primer año de la carrera y en el mismo año se establecen las especialidades de Silvopascicultura e Industrias de la Madera y Corcho, así como el plan de estudios del segundo año.

Es la O.M. de 4 de Junio de 1960 la que establece el tercer curso de la carrera en sus dos especialidades, culminando así la formación de los titulados Péritos de Montes. Con motivo de la Ley de 29 de Abril de 1964, sobre reordenación de las Enseñanzas Técnicas, se suprime el curso Selectivo en las Escuelas Técnicas, lo que supone que los estudios de la Carrera se reducen a tres años, en vez de cuatro que tenían en su origen.

Con dicha Ley, la Escuela cambia de nombre y pasa a denominarse Escuela de Ingeniería Técnica Forestal, y por Decreto de 14 de Agosto de 1965 se fija la denominación de los futuros titulados en "Ingeniero Técnico en Explotaciones Forestales" o "Ingeniero Técnico en Industria de la madera y Corcho", según la especialidad cursada por el alumno. Finalmente se establecen en la Escuela de Ingeniería Técnica Forestal, las consiguientes especialidades en "Explotaciones Forestales", "Industrias de los Productos Forestales" e "Industria Papelera", pasando a ser las denominaciones de los titulados las de "Ingeniero Técnico" seguidas de la correspondiente a la especialidad cursada".

2.2. ANTECEDENTES HISTÓRICOS DE LAS ASIGNATURAS DE DASOMETRÍA, INVENTARIO Y ORDENACIÓN DE MONTES

Refiriéndonos a la *Dasometría*, en Francia Duhamel du Monceau (1764) es el primer autor que se ha ocupado ampliamente de la *Dasometría* en un tratado forestal. Durante el siglo XIX, los especialistas trataron la cuestión más fragmentariamente.

En España, Lucas Olazabal en 1.883 dedicó unas 65 páginas de su "*Ordenación de Montes*" al tema de la métrica del monte arbóreo en un capítulo denominado *Xilometría*. Y D. José del Río Paternina dio unas lecciones prácticas de investigación epidométrica, completada con algún capítulo del libro italiano, original del profesor Cav. Francisco Piccioli, "*Tassazione ed Assestamen forestale*", correctamente traducido al español por el Ingeniero don Rafael Alvarez Sereix, impreso en 1880, que exponía lo esencial de la *Dasometría* centro-europea de los años 1825-1870.

El libro francés de G. Huffel, profesor de Nancy, primera edición (1905), *Economie forestière*, tomo segundo, registró avances de origen germánico y orientando la exposición a ser antecedente o introducción de la Economía, con la consiguiente penuria de detalles técnicos, que fue suplida mediante apuntes y explicaciones de los profesores y con prácticas de campo y de gabinete.

Con posterioridad a estas fechas, aparecen diversos libros de diversos autores, de los que merecen destacarse: "*Forest Mensuration*" de Bruce y Schumacher, en Nueva York en 1935; "*Forest Mensuration*" de Meyer, en Estados Unidos en 1953; "*Dendromètrie*" de Pardé en Francia en 1961, que se ha reeditado y revisado en 1988. En Dinamarca (Moller, 1951), en Alemania (Prodan, 1951), en la Unión Soviética (Anutschin, 1954), han publicado textos sobre *Dasometría* que gozan de buena reputación. También Mackay, en 1963 publicó "*Dasometría, teoría y técnica de las mediciones forestales*".

En cuanto a las disciplinas de Inventario, Ordenación y Valoración de Montes, con las que tan estrechamente se relaciona la *Dasometría*, decir que la formación de los primeros inventarios forestales nacionales se realizan en Suecia, Finlandia y Noruega poco después de la Primera Guerra Mundial, generalizándose después de la Segunda, en Europa y América del Norte. En la actualidad la ejecución de inventarios forestales tanto regionales como nacionales se extiende por todos los continentes.

La expansión de este tipo de inventarios se debe a la demanda de información y a que la aplicación de la fotointerpretación, muestreos y proceso electrónico de datos han hecho posible la ejecución de los mismos en tiempos razonables y a costos bajos. La repetición de los inventarios es necesaria en razón de los cambios que en superficies y existencias maderables pueden presentar los bosques a lo largo del tiempo. Un intervalo de 10 años entre inventarios parece ser el más adecuado.

En la reunión del IUFRO (*International Union of Forest Research Organizations*) celebrada en Bucarest en el año 1978, en el grupo correspondiente a Inventarios de recursos forestales, se cuestionó si los inventarios nacionales podrían formarse por integración de datos de los montes ordenados. La respuesta fue que sólo podría hacerse esto en los países con una superficie de

montes ordenados que represente un gran porcentaje de la superficie total de los bosques del país y, además, con una gran homogeneidad en los inventarios de ordenaciones que permita la integración de sus datos.

Finlandia lleva a cabo el séptimo inventario forestal nacional, Suecia su quinto y Austria su segundo. En España se ha terminado hace unos pocos años el *Segundo Inventario Forestal Nacional*. Este inventario es "continuo", estableciéndose ciclos de 5 años para las especies de crecimiento rápido y 10 años para las especies de crecimiento lento. Se está realizando con fotogramas aéreos del vuelo de 1985, a escala 1/30.000, elaborándose la cartografía de salida a E. 1:250.000

La Ordenación como asignatura en los estudios técnico-forestales nace en Centroeuropa, concretamente en la localidad de Tharandt (Sajonia, Alemania), y se explicó por vez primera en la Escuela Forestal que dirigió Heinrich Von Cotta a principios del siglo XIX. De Alemania, la Ordenación pasó a Francia, donde en 1837, Salomón publicó su "*Traité de l'Aménagement*", extendiéndose posteriormente por toda Europa y América del Norte (Canadá y Estados Unidos).

Centrándonos ya en España, Lucas Olazábal publicó en 1.883 un libro didáctico original de Ordenación de Montes, siendo también Catedrático de Ordenación en la única cátedra de Universidad de esta materia impartida en nuestro país. Esta cátedra fue ocupada a mediados del siglo pasado por el eminente Agustín Pascual, el cual realizó notables trabajos sobre Ordenación, pero que no llegaron a componer cuerpo de doctrina. En 1944 aparece la 2ª publicación en español denominada "*Fundamentos y Métodos de la Ordenación de Montes*" de D. Enrique Mackay.

El Ministerio de Fomento publicó en 1890 las primeras *Instrucciones Oficiales de Ordenación*, por las que se habrían de regir los proyectos de Ordenación. En 1930, se publicaron las *Instrucciones Generales para la Ordenación y Organización Económica de la Producción Forestal*, y en 1971 vieron la luz las *Instrucciones Generales para la Ordenación de los Montes Arbolados*, que fueron aprobadas por Orden Ministerial del Ministerio de Agricultura de 29 de Diciembre de 1970, que son las actualmente vigentes para la realización de los proyectos de Ordenación en España.

Los primeros proyectos de Ordenación de Montes en España datan de 1882. Actualmente tenemos alrededor de 2.000.000 ha de montes ordenados, de las que una gran parte corresponden a proyectos realizados durante los años 1955 a 1970. La superficie afectada por cada proyecto raramente rebasa las 10.000 ha. La Ordenación de Montes está basada en el conocimiento descriptivo y métrico que proporciona el inventario del monte sirviéndose de la *Dasometría*.

3.- LAS UNIDADES DE MEDIDA. CONCEPTOS RELACIONADOS CON LAS MEDICIONES FORESTALES

3.1. LAS UNIDADES DE MEDIDA

Para observar y cualificar las propiedades de los objetos a la vez que poder compararlos cuantitativamente, es preciso tomar una unidad de referencia de la propiedad que se desea apreciar. La unidad de referencia básica es lo que se llama unidad de medida (en España se utiliza el Sistema Internacional de unidades - S.I. -, basado en el sistema métrico decimal).

Las medidas que se realizan en *Dasometría* tienen como objetivo cuantificar numéricamente las propiedades del árbol y de la masa en su conjunto.

Las propiedades a cuantificar en nuestro caso se corresponden a la medición de

- ✓ Variables discretas: son aquellas que se representan por un único valor del parámetro buscado, mediante un número entero positivo: número de piñas de un pino, número de ramas del árbol, número de pies en la masa, etc. Se cuantifican por conteo.
- ✓ Variables continuas, en las que el parámetro medido podrá tener infinitos valores en un determinado rango y se representa mediante un número decimal: diámetro normal del árbol, altura total, volumen del tronco, área basimétrica de la masa, etc.. Se cuantifican mediante medición directa e indirecta.

El S.I. de unidades utiliza como unidades básicas fundamentales las siguientes: para las longitudes el metro (m), para las masas el kilogramo (kg) y para el tiempo el segundo (s), aunque también se utilizan los múltiplos y submúltiplos de las anteriores. Existen otras unidades deducidas de las fundamentales, como son:

- ✓ de superficie: 1 m², 1 área (100 m²), 1 hectárea (10.000 m², 1 ha)
- ✓ de volumen: m³
- ✓ de peso: 1 Newton; 1 N = 0,1 kg-fuerza; normalmente se utiliza el kg como unidad de peso en las transacciones comerciales, y sus múltiplos, como son el quintal métrico (100 kg) y la tonelada métrica (t)

Las mediciones forestales pueden realizarse de manera directa o indirecta. Una medida directa es aquella en la que se obtiene el valor de la magnitud por comparación con otra de su misma especie que se tome como la unidad. No obstante, en muchas ocasiones, la magnitud a determinar no se mide directamente, sino que debe ser estimada a través de otras magnitudes intermedias, relacionadas con la magnitud final mediante una fórmula:

$$z = f(x, y, \dots)$$

3.2. PRECISIÓN, EXACTITUD Y SESGO EN LAS MEDICIONES

En general, las mediciones llevarán siempre agregado un grado de incertidumbre a consecuencia de que nunca podrán ser exactas, sino aproximadas. Esto ocurre mucho más patentemente en *Dasometría*, donde el mismo objeto de medición (el árbol) presenta características muy variables que harán que sea difícil obtener el verdadero valor buscado del parámetro medido.

La discrepancia entre el verdadero valor y la medida realizada es consecuencia de la existencia de errores, bien debidos al propio objeto medido (árbol), al instrumento de medición o a la persona que realiza las mediciones.

En general los errores se pueden clasificar como:

1. Errores groseros. Debidos al operador que realiza la medición. Se eliminan realizando reiteraciones en la toma de datos.
2. Errores accidentales. Son errores aleatorios, debidos tanto al instrumento -precisión- como al objeto de medida (irregularidades del mismo).
3. Errores sistemáticos. Son aquellos errores que obedecen a causas fijas, haciendo que la mediciones se desvíen del valor real de manera continua. Un error de este tipo podría darse en las mediciones realizadas con una forcípula de intervalos mal señalados. Los resultados así ofrecidos vendrán acompañados de un sesgo.
4. Errores de muestreo: Son aquellos debidos a la simplificación que se realiza al utilizar una muestra en vez del total poblacional. Se disminuirán en parte aumentando la muestra.

Por la propia existencia de errores, es posible definir distintos conceptos referentes a las mediciones a realizar:

- ✓ Precisión. Es el grado de agregación de una serie de medidas (no debe ser confundido con el de exactitud). Es decir, se dice que una medición es precisa cuando, tomando varios resultados individuales, éstos difieren poco de su media. Lo mejor sería que además de diferir poco se agruparan en torno a ella siguiendo una distribución normal de Gauss. Que una medida sea precisa no quiere decir que sea exacta, ya que puede ocurrir que el aparato tenga un defecto de origen que repercuta en todas las mediciones.
- ✓ Sensibilidad. La unidad mínima que puede ofrecer la lectura de un aparato.
- ✓ Exactitud. Es la proximidad de una medida al verdadero valor.
- ✓ Sesgo: Hace referencia a los errores sistemáticos introducidos al usar los aparatos de medición, y cuyo origen puede ser diverso: procedimientos de medición imperfectos, errores de los instrumentos, defectos en los procedimientos de muestreo, errores en los cálculos, equivocaciones, etc.

3.3. CIFRAS SIGNIFICATIVAS Y REGLAS DE REDONDEO

En la medición de las variables continuas, se debe acotar el número de cifras significativas que han podido ser garantizadas de acuerdo a la precisión del aparato empleado. Un dígi-

to significativo se define como aquel que puede denotar el verdadero tamaño de la unidad de medida y vendrá dado por su localización específica dentro del número completo.

Las cifras significativas de un número las constituyen los dígitos leídos de izquierda a derecha, comenzando por el primero distinto de cero, y terminando con el último escrito (que puede ser cero) de tal manera que dichas cifras sean las que el aparato pueda garantizar. Ejemplo de un número con dos dígitos significativos: 25 cm, 2,5 dm, 0,25 m (vemos como el cambio de unidad no alterará el número de cifras significativas).

Podría ocurrir que uno o varios ceros aparezcan inmediatamente a la izquierda del punto decimal y no haya dígitos a la derecha del mismo. En este caso puede haber duda acerca de cuantas cifras significativas tiene dicho número. Por ejemplo, el número 2500, tendría 2, 3 ó 4 cifras significativas, dependiendo de si ninguno, uno o ambos ceros, respectivamente, denotan medida real o han sido usados para redondear. Generalmente se toma como convenio poner un punto encima del dígito que marque la última cifra significativa, o bien descomponer el número en dos factores, uno donde aparecerían las cifras significativas y el otro sería potencia de 10: así si 25.000 tuviera dos cifras significativas se expresaría como 25×10^3 , y si tuviera 3 como 250×10^2 .

Generalmente los números utilizados en las operaciones de cálculo no son exactos, pues proceden de medidas realizadas con instrumentos que hacen que dichas medidas sean aproximadas. Así al medir la altura de un árbol con un hipsómetro que aprecie el metro y con otro que aprecie el cm, se tendrían las siguientes cifras: $h_1 = 13$ m; $h_2 = 12,46$ m. Obviamente en ambos casos la exactitud es distinta, pues en $h_1 = 13$ sabemos que el verdadero valor de la altura (si no existen otros errores salvo los debidos a la sensibilidad del aparato de medición) estaría entre 12,5 – 13,5; sin embargo para $h_2 = 12,46$, el verdadero valor estaría entre 12,455 – 12,465.

Por lo anterior y debido a la importancia de las cifras significativas debemos dar unas sugerencias relacionadas con la precisión de la toma de datos originales:

- 1.- No tomar más cifras significativas de las que puedan indicarse realmente en el proceso de medición o garantizarse por el instrumento de medida utilizado.
- 2.- Adecuar la precisión de los datos originales a la precisión deseada en los resultados finales. Es bueno tener presente que usar una precisión más grande que la necesaria, de acuerdo a los resultados finales, es perder tiempo y dinero.
- 3.- Si se trabaja mediante la técnica de muestreo es importante tener en cuenta que en el resultado final tendrá gran importancia el error de muestreo (ϵ), por lo que no será tan importante la precisión en la toma de datos originales.

Para ser acordes con las sugerencias anteriores, a veces es necesario redondear los resultados finales (no en los originales) pues, como veremos más adelante, las operaciones con números aproximados acumulan los errores individuales de cada número implicado en los cálculos.

Supongamos que sabemos cuantas cifras significativas debe tener un número aproximado (obtenido como fruto de distintas operaciones realizadas con números aproximados).

Para dejar exclusivamente las cifras significativas de ese número, existen las denominadas reglas de redondeo.

Estas reglas consisten, cuando el número a redondear es decimal y las cifras a eliminar están en la parte decimal, en borrar los dígitos no deseados a la derecha del punto decimal, forzando o no la inmediata cifra significativa. Si el número no es decimal o, siéndolo, la primera cifra significativa cae en la parte no decimal del número, el redondeo consiste en sustituir por ceros aquellos dígitos situados a la izquierda del punto decimal (parte entera del número), forzando o no la inmediata cifra significativa.

Como regla general hay que forzar (añadir una unidad) la última cifra significativa siempre que la primera de las despreciadas sea igual o superior a 5, y dejar tal como está en caso de que sea <5 . Cuando la cifra 5 aparece frecuentemente, por razón de las operaciones realizadas, si seguimos la regla general de redondeo cometeríamos siempre un error por exceso (pues siempre forzaríamos la última cifra significativa). Por ello, cuando la cifra despreciada sea 5, se forzará la última cifra significativa si esta es impar, y se dejará como tal si es par.

3.4. OPERACIONES CON NÚMEROS APROXIMADOS

Aunque ya conocemos cuales son las reglas de redondeo, lo realmente importante es saber cuantas cifras significativas tiene un número aproximado.

Sabemos cuantas cifras significativas tiene un número tomado con un determinado instrumento, pues conocemos la sensibilidad del aparato. Sin embargo cuando realizamos operaciones numéricas con números aproximados, no es tan inmediato conocer las cifras significativas del resultado de la operación u operaciones.

Por ello vamos a dar una serie de reglas en relación a las cifras significativas de los números resultantes de distintas operaciones con números aproximados, abordando la cuestión bien desde el punto de vista de las cifras significativas y desde el punto de vista del error cometido.

Debemos indicar que desde el punto de vista estadístico, esto es, cuando se trabaja con variables aleatorias que presentan unos valores medios y unas desviaciones con respecto a esta media (desviación estándar) y, en el caso de muestreo, unas desviaciones de las distintas medias (errores estándar), es necesario introducir nuevos conceptos, como son desviación de la suma de dos variables aleatorias o producto de dos variables aleatorias, aunque esto se verá en el próximo curso en la asignatura de Inventario de Montes. Veamos las reglas a tener en cuenta al realizar cálculos con los números aproximados.

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

"En la multiplicación o división de dos números aproximados, el factor con menos cifras significativas limita el n° de dígitos significativos en el resultado". Así, el número resultante tendrá como máximo un número de cifras significativas igual al que tenga menos.

"El error relativo del resultado de multiplicar o dividir dos números aproximados es igual a la suma de los errores relativos de cada factor". En el caso de multiplicar o dividir un número aproximado por un número exacto, el nº de cifras significativas en el resultado es igual o inferior al del número aproximado (este sería el caso de sumar un número aproximado tantas veces como indique el número exacto).

Una buena regla en la multiplicación o división de números aproximados es guardar un dígito más en el producto o cociente obtenido que el más corto de los factores, esto es, el que tiene menos cifras significativas (esto minimiza los errores de redondeo que envuelven una serie de operaciones, pues al final se redondeará a las cifras significativas correspondientes). Cuando un número aproximado se puede precisar tanto como queramos (π , e), al multiplicarlo por un número aproximado hay que tomar tantas cifras significativas como el que tenga menos, más una (esto se hace para no perder exactitud, aunque al final el resultado se redondea a las cifras significativas correspondientes).

ADICIONES O SUSTRACCIONES

"Los números aproximados pueden ser sumados o restados siempre que sus dígitos significativos coincidan con alguna posición a la izquierda o derecha del punto decimal. El nº de dígitos significativos en la respuesta de la operación realizada nunca puede ser más grande que el más grande de los números, aunque lo más habitual es que sea más pequeño"

Esto indica que para realizar sumas o restas de números aproximados es necesario que sean acordes en cuanto a la colocación del punto decimal.

"La suma de una serie de números aproximados, que puede tener más cifras que cualquiera de las medidas individuales, tendrá un número de dígitos significativos que no excederá al de la medición que tenga más".

"El error absoluto de la suma o diferencia de números aproximados es igual a la suma de los errores absolutos de cada sumando".

4. CÁLCULO DE ERRORES

Hemos visto anteriormente como, para los parámetros medibles que se representan como variables continuas, es imposible precisar totalmente el verdadero valor. Por tanto, cualquier medición llevará siempre ligado un error que es preciso acompañar al valor ofrecido. En la práctica, los errores se pueden definir de forma absoluta o de forma relativa.

- ✓ Error absoluto (ε_a). Expresa la diferencia entre una medida realizada sobre las dimensiones de un objeto y su valor exacto. Este valor exacto normalmente se desconoce, por lo que se acotará la variable medida ofreciendo un intervalo en el que se supone estará incluido el valor real buscado.

$$\varepsilon_a = V_r - V_m$$

- ✓ Error relativo (ε_r). Aquel que resulta de referir por cociente y en tanto por ciento (%) la magnitud del error cometido. Es el que mejor ofrece la cuantía del error cometido respecto a la magnitud medida (V_m), y podrá valer 0-100 %:

$$\varepsilon_r (\%) = \frac{\varepsilon_a}{V_m} \times 100$$

4.1. CÁLCULO DE ERRORES EN MEDIDAS DIRECTAS

Vimos como las mediciones directas eran aquellas en las que los valores de cualquier parámetro forestal vendrá dado por comparación con la unidad de referencia. Estas medidas directas se toman usando el aparato adecuado, por ejemplo, el hipsómetro para la altura y la forcípula para los diámetros normales. El error absoluto máximo de una medición será función de la sensibilidad del aparato con el que se realizó dicha medición. La sensibilidad de un aparato es el valor más pequeño de la magnitud medible con el mismo, y coincidirá con la división más pequeña de la escala utilizada por el aparato.

Por ejemplo, supongamos que se pretende medir el diámetro de un árbol con forcípula de precisión 1 cm (figura 1.2).

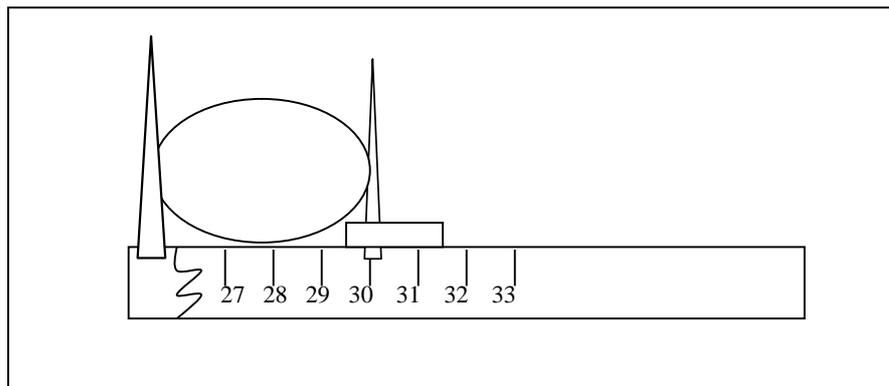


Figura 1.2. Errores en la medición de variables continuas (medición del diámetro con forcípula)

Con esta medición, podríamos anotar que el diámetro del árbol sería de unos 30 cm, puesto que se percibe que está más cercano de la marca del 30 que la del 29. Es decir, a lo sumo, podríamos afirmar que el verdadero valor estaría en el rango de 29,5 a 30 cm, por lo que podríamos dar por valor final de la medida $30 \pm 0,5$ cm. El error absoluto debido al aparato sería calculado en función de la sensibilidad de éste y sería precisamente la mitad de dicha sensibilidad como hemos visto:

$$\varepsilon_a = \frac{S}{2}$$

Esta expresión nos ofrece el valor más aceptable del error en una única medición. Frecuentemente es necesario realizar varias mediciones de uno de los parámetros. En este caso, es necesario tener en cuenta el conjunto de errores cometidos en la medición del parámetro forestal de interés.

Error absoluto de un parámetro en el que se han realizado varias medidas

Se tomará en este caso como valor definitivo de la variable medida la media aritmética de todas las mediciones:

$$x_m = \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

A este valor medio se le deberá signar un error que acote el valor real de la magnitud medida. Senen (1.979) propone el siguiente método que indica el número mínimo de mediciones a realizar, así como para calcular el error absoluto que debería acompañarse:

1. Se realizarán tres medidas del parámetro buscado
2. Se calculará la media de las tres medidas y la dispersión mayor o rango (R), que vendrá dado por la diferencia entre los valores extremos
3. Se calculará el porcentaje de dispersión (T):

$$T = \frac{R}{\bar{x}} \times 100$$

4. El valor de T nos dará el número de mediciones mínimas necesarias a realizar:

- ✓ Si $0 \% < T \leq 2 \%$ son suficientes las 3 mediciones realizadas
- ✓ Si $2 \% < T \leq 8 \%$ son necesarias 6 mediciones
- ✓ Si $8 \% < T \leq 12 \%$ son necesarias 15 mediciones
- ✓ Si $12 \% \leq T$ son necesarias 50 mediciones

5. El error absoluto se calculará de la siguiente manera

- ✓ Si se han realizado hasta 6 mediciones, se calcularán los errores absolutos de las mediciones individuales y se dará su media:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$$

donde: $\varepsilon_i = x_i - \bar{x}$

- ✓ Si se han realizado más de 6 mediciones, se utilizará la expresión del error cuadrático:

$$\varepsilon_c = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x}_i)^2}{(n-1) \times n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}$$

σ es la desviación típica, que muestra la dispersión de los valores entorno a su media. Cuando σ es grande los valores individuales están muy dispersos, al contrario, cuando menor sea menos diferirán los datos de su media.

4.2. CÁLCULO DE ERRORES EN MEDIDAS INDIRECTAS

En gran número de ocasiones la magnitud buscada no es posible medirla directamente, sino que deberá ser estimada a través de otras magnitudes intermedias que sí que habrá que medir, viniendo el error final en función de los errores de las magnitudes medidas de forma directa. En estos casos, se aplica una fórmula matemática o función del tipo:

$$Z = f(x, y, \dots)$$

Donde Z: parámetro estimado o parámetro dependiente
 x, y...: parámetros medidos o parámetros independientes

A partir de la fórmula de cálculo del parámetro será posible derivar la expresión del error total cometido en las estimaciones, así como la importancia relativa de los diferentes errores implicados en la aplicación de la fórmula propuesta.

Así, es posible diferenciar la ecuación anterior, que para el caso de 2 variables independientes o parámetros medibles (x, y) nos ofrecería la siguiente derivada:

$$dz = \frac{\delta f}{\delta x} \times dx + \frac{\delta f}{\delta y} \times dy$$

Asimilando los diferenciales a incrementos de tipo finito, podríamos obtener una primera estimación del peso de los errores:

$$dz = \frac{\delta f}{\delta x} \times \Delta x + \frac{\delta f}{\delta y} \times \Delta y$$

El incremento nos ofrece el entorno de la variable en el cuál estaría el valor verdadero del parámetro medido, es decir, el error máximo cometido:

$$\varepsilon_z = \frac{\delta f}{\delta x} \times \varepsilon_x + \frac{\delta f}{\delta y} \times \varepsilon_y$$

Si elevamos al cuadrado y calculamos el promedio de la anterior expresión, tendremos el valor de un error cuadrático medio:

$$\langle \varepsilon_z^2 \rangle = \left\langle \left(\frac{\delta f}{\delta x} \right)^2 \times \varepsilon_x^2 \right\rangle + \left\langle \left(\frac{\delta f}{\delta y} \right)^2 \times \varepsilon_y^2 \right\rangle + \left\langle 2 \times \left(\frac{\delta f}{\delta x} \right) \times \left(\frac{\delta f}{\delta y} \right) \times \varepsilon_x \varepsilon_y \right\rangle$$

Al calcularse los promedios, el último término desaparece pues ε_x e ε_y son independientes, con cuál solo quedarán los términos cuadráticos de x e y :

$$\langle \varepsilon_z^2 \rangle = \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \times \varepsilon_x^2 \right\rangle + \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \times \varepsilon_y^2 \right\rangle$$

Esta expresión proporcionará el error absoluto de la magnitud final en función de los errores absolutos de las magnitudes medidas de forma directa:

$$\varepsilon_z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \times \varepsilon_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \times \varepsilon_y^2}$$

Cálculo de errores en funciones monomias exponenciales

Para el caso de este tipo de funciones, es muy útil una transformación logarítmica previa de las variables. El ejemplo más ilustrativo de estas funciones en dendrometría, es la determinación del volumen de un árbol en función de su diámetro y de su altura:

$$v = \frac{\pi}{4} \times d^2 \times h$$

Los cálculos se simplificarán bastante tomando logaritmos neperianos en ambos miembros de la ecuación:

$$\ln v = \ln \frac{\pi}{4} + 2 \ln d + \ln h$$

El cálculo del error en volumen se determina diferenciando la expresión anterior:

$$\frac{dv}{v} = 0 + 2 \frac{dd}{d} + \frac{dh}{h}$$

Sustituyendo diferenciales por incrementos finitos:

$$\frac{\Delta v}{v} = 2 \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta h}{h}$$

El incremento de los valores de los parámetro nos acota los valores máximo y mínimo de dichos parámetros, es decir, el máximo error absoluto:

$$\frac{\varepsilon_v}{v} = 2 \frac{\varepsilon_d}{d} + \frac{\varepsilon_h}{h}$$

Los errores absolutos divididos por su correspondiente valor son, por definición, errores relativos:

$$Er_v = 2Er_d + Er_h$$

Esta expresión es válida para el cálculo del error relativo en la estimación del volumen de un árbol en función de los errores relativos cometidos en la medición del diámetro y de la altura. Es destacable el hecho de que el error relativo en diámetro tenga de peso el doble que el de la altura en la estimación del volumen, por lo que deberían hacerse más precisas las mediciones de este parámetro.

Así mismo, se ha demostrado que el error relativo de un producto es la suma de los errores relativos de los factores. En efecto, el volumen del árbol se expresa por:

$$v = \frac{\pi}{4} \times d^2 \times h, \quad \text{es decir } v = \frac{\pi}{4} \times d \times d \times h$$

Según las propiedades de los números aproximados, el error relativo del producto es la suma de los errores relativos:

$$Er_v = Er_d + Er_d + Er_h = 2Er_d + Er_h$$

Luego queda demostrada como válida esa propiedad para el cálculo de errores.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANUTSCHIN, N.P. (1.954). *Lesnaia Taksatsia*. Moscú. 551 pp.

AVERY, Th. E. & BURKHART, H.E. (1.983). *Forest measurements*. 3ª edición. Mc Graw-Hill Book Company. New-York. 332 pp.

BAUER MANDERSCHIED, E. (1.980). "*Los Montes de España en la historia*". Servicio de Publicaciones Agrarias. Ministerio de Agricultura. Madrid.

DUHAMEL DU MONCEAU, H.L. (1.764). *De l'exploitation des bois ou moyens de tirer un parti avantageux des taillis demi-frutales et hautes futaies*. Guéri et Delatour. Paris. 706 pp

HUFFEL, G. (1.905). *Économie forestière, tome II*. 1ª edición. Paris. 502 pp.

HUFFEL, G. (1.919). *Économie forestière, tome II*. 2ª edición. La Maison Rustique. Paris. 502 pp.

MACKAY, E. (1.944). *Fundamentos y Métodos en la Ordenación de Montes*. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Montes. Madrid

MACKAY, E. (1.964). *Dasometría*. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Montes. Madrid.

MEYER, H.A. (1.953). *Forest Mensuration*. Penns Valley Publishers Inc. Pennsylvania. 357 pp.

MOLLER, C.M. (1.933). *Boniteringstabeller og bonitetsvise tilvaektoversigter, for Bog. Ed. Op. Rodgran i Danmark*. Copenhagen.

OLAZÁBAL, L. (1.883). *Ordenación y Valoración de Montes*. 1ª ed. Madrid.

PARDÉ, J. & BOUCHON, J. (1.961). *Dendrometrie*. École Nationale du Génie Rural des Eaux et Forêts (ENGREF). Nancy.

PICCIOLI, F. (1.880). *Elementos de tasación forestal*. Madrid.

PITA CARPENTER, P.A. (1.979). *Apuntes de Dasometría (Tomo I)*. Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Forestal. Madrid.

PRODAN, M. (1.951). *Messung der Waldbeständ*. J.D. Sauerländer´s Verlag. Frankfurt-am-Main. 259 pp.

SENEN, F. (1.979). *Apuntes de técnicas de laboratorio*. Servicio de Publicaciones de la U.P.V.

CAPITULO 2

CUBICACIÓN DEL ÁRBOL (I)

- 2.1. COMPOSICIÓN MORFOLÓGICA DEL ÁRBOL**
- 2.2. DEFINICIÓN DE LAS VARIABLES BÁSICAS A MEDIR EN LOS ÁRBOLES**
- 2.3. CUBICACIÓN TEÓRICA DEL ÁRBOL. TIPOS DENDROMÉTRICOS, ECUACIONES DEL PERFIL Y CÁLCULO DEL VOLUMEN**

2.1. COMPOSICIÓN MORFOLÓGICA DEL ÁRBOL

Todo ser vivo vegetal consta genéricamente de raíces, tronco y copa. Para el desarrollo de los modelos de cubicación de los pies es muy importante el estudio exhaustivo del tronco de los árboles. Según su apariencia externa podemos definir dos tipos de troncos de árboles (Figura 2.1):

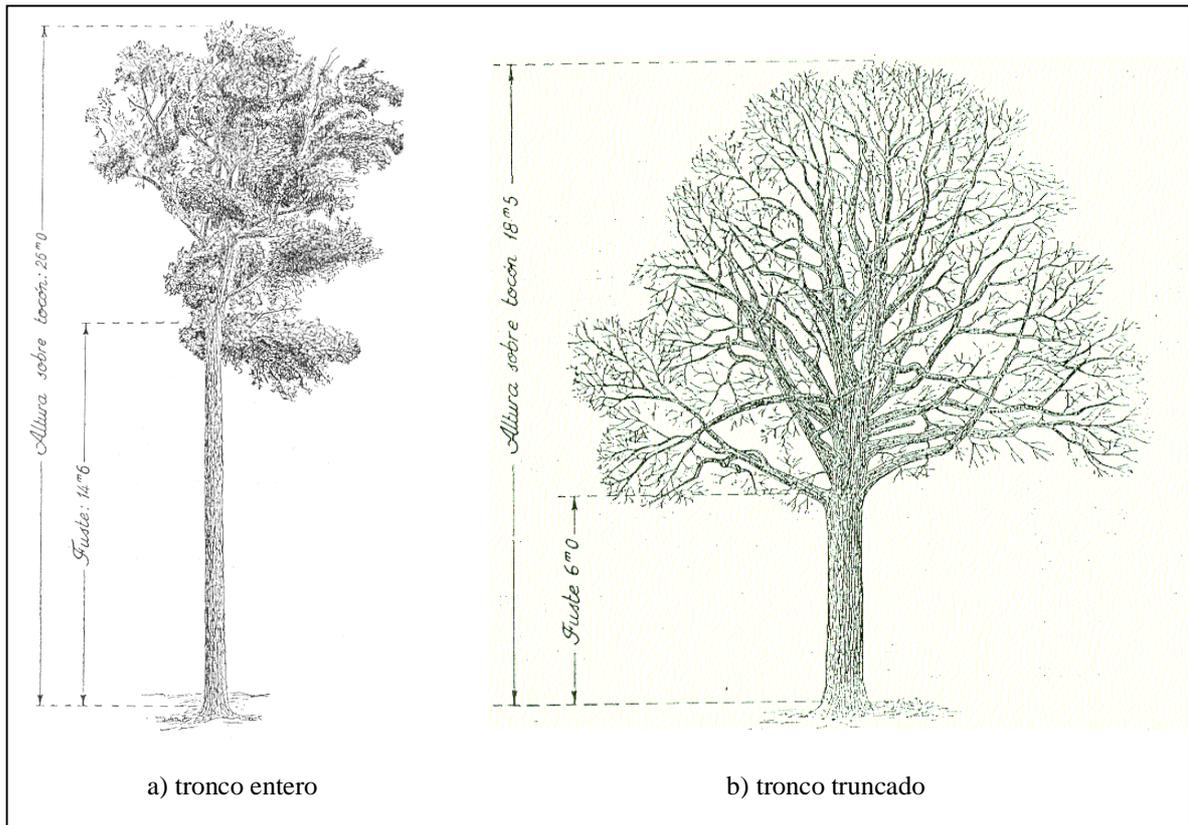


Figura 2.1. Tipos de troncos de árboles según apariencia externa (tomado de MACKAY, 1.964)

1. Tronco entero, aquel en el que se distingue un eje o tramo principal, del que salen ramas laterales desde una determinada sección, y a partir de allí se van distribuyendo a lo largo de toda su longitud, siendo posible diferenciar el tronco principal de las ramas
2. Tronco truncado, en el que aparecen ramas laterales a una determinada altura en la que el tronco finaliza y a partir de ese nivel no se puede distinguir claramente el tronco principal de las ramas de la copa

A su vez el tronco se divide en las siguientes partes (Figura 2.2):

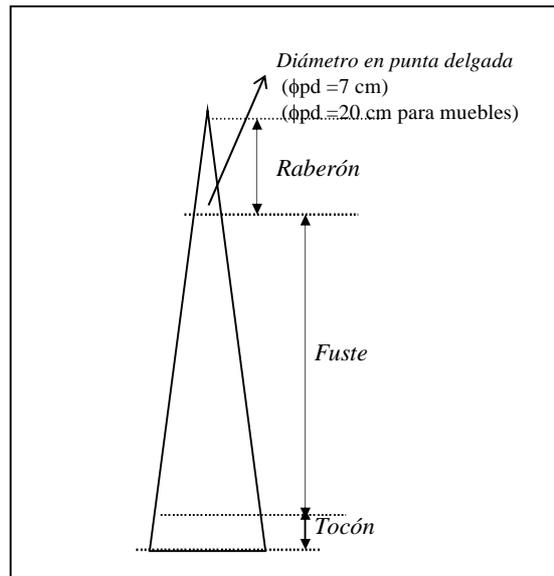


Figura 2.2. Diferentes partes del tronco del árbol

- **Fuste.** Parte del tronco desde el suelo hasta la copa, es decir, aquella parte limpia de ramas. Otro concepto de fuste sería el de fuste comercial. El fuste comercial es la parte del tronco de longitud desde la base del tronco hasta un determinado diámetro, definido como diámetro en punta delgada. Sería la parte aprovechable del tronco del árbol, ya que podría ser dividido en trozas para posterior aprovechamiento de la madera en rollo
- **Raberón.** Parte sobrante del árbol que queda por encima del fuste y que no se va a utilizar, es parte del residuo del árbol
- **Tocón.** Pequeña troza de la zona inferior del tronco que queda en el suelo cuando el árbol se corta. Debemos dejarlo en el monte pues su materia orgánica pasará a los diferentes niveles edáficos. Si no se arranca la raíz porque el árbol debe brotar nuevamente de esta parte o de la raíz (frondosas, eucaliptos, etc) se puede llamar también al tocón y a la raíz como *cepa*

Además del tronco salen las **ramas**. Las ramas conforman la copa del árbol, sustentan el **follaje** y a través de ellas pasan tanto el agua como los nutrientes a las hojas del árbol. Suelen ser destinadas a leñas como principal aprovechamiento. El follaje tiene como principal misión realizar la fotosíntesis en el árbol, esto es, convertir energía lumínica en componentes nutritivos para el árbol, y en definitiva generar nuevas fuentes de energía para el desarrollo del árbol.

2.3. DEFINICIÓN DE LAS VARIABLES BÁSICAS MEDIDAS EN LOS ÁRBOLES

2.3.1. INTRODUCCIÓN

Como ya adelantamos, aunque otras partes del árbol y otros productos del bosque son importantes, la madera ha sido comúnmente el componente del árbol que más se ha medido en ingeniería forestal. El ingeniero suele expresar en volumen de madera los resultados de los inventarios realizados, la predicción del crecimiento de la masa o la estimación de la calidad de estación de un determinado sitio.

El volumen de madera deberá ser estimado en función de 3 parámetros que son básicos para la dendrometría:

1. Área basal o de la sección normal*
2. Altura
3. Forma

* su equivalente en masas es el área basimétrica, por tanto es incorrecto definir el área de la sección normal como área basimétrica

Estos serían los parámetros básicos de cálculo del volumen del árbol y serán los verdaderos estimadores de la productividad forestal (ya sea del árbol individual o de la masa). Así el volumen (V) vendrá definido por la siguiente expresión:

$$V = g \times h \times f \quad (m^3)$$

En donde:

g : área basal o de la sección normal (m^2)

h : altura del árbol (m)

f : coeficiente de forma o mórfico

El término área basal o de la sección normal lleva incluido implícitamente la medición del diámetro del árbol. Por tanto el diámetro normal se constituye en un parámetro fundamental de cálculo en el volumen del tronco del árbol:

$$V = \frac{\pi}{4} \times d^2 \times h \times f \quad (m^3)$$

Veamos a continuación como se definen y se miden los parámetros básicos de la dendrometría.

2.3.2. ÁREA BASAL O ÁREA DE LA SECCIÓN NORMAL

Es el parámetro que trata de definir la forma del perímetro de la sección transversal del árbol. Para determinarla se medirá el diámetro de una sección de referencia y se aplicará la fórmula del área de una sección circular:

$$g = \frac{\pi}{4} \times d^2$$

Donde d es el diámetro medido (m) en la sección de referencia. También será posible definir g en función del propio perímetro de la sección de referencia. En este caso se mediría dicho perímetro y se aplica la siguiente expresión:

$$g = \frac{c^2}{4 \times \pi}$$

Siendo c la longitud de la circunferencia correspondiente a la sección de referencia. Esta fórmula es fácilmente demostrable aplicando la relación existente entre el diámetro y el radio de un círculo:

$$c = 2\pi \times R ; \quad R = \frac{c}{2\pi}$$

$$g = \frac{\pi}{4} \times d^2 = \pi \times R^2 = \pi \times \frac{c^2}{4\pi^2} = \frac{c^2}{4\pi}$$

La sección de referencia de un árbol normalmente no será completamente circular, por lo que la estimación del área a través de un único diámetro estará sesgada. Este error podrá ser paliado en parte realizando dos mediciones diametrales perpendiculares entre sí, dándose por correcto el diámetro medio de los dos anteriores:

$$d = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

Hasta ahora hemos hablado de calcular el volumen en función del diámetro medido sobre una sección de referencia. Es necesario estandarizar las mediciones mediante el establecimiento de una sección de referencia única, sobre la que se realizarán siempre las mediciones diametrales.

La sección de referencia se define en función de su altura sobre la superficie del suelo, debiendo cumplir que sea fácilmente accesible o medible para el operario y además que sea lo más regular posible (muy semejante a una sección circular). La sección del árbol situada a 1,30 m del suelo normalmente satisface ambos requisitos, por lo que es la elegida en dendrometría para estimar el parámetro g . Esta sección se denomina *sección normal*, a su área se le denomina *área basal* ó *área de la sección normal* y al diámetro correspondiente *diámetro normal* o *diámetro a la altura del pecho (dn)*. Existe una gran casuística en las posibles mediciones del diámetro normal, en función de la forma y disposición del tronco del árbol en el terreno (Figura 2.3).

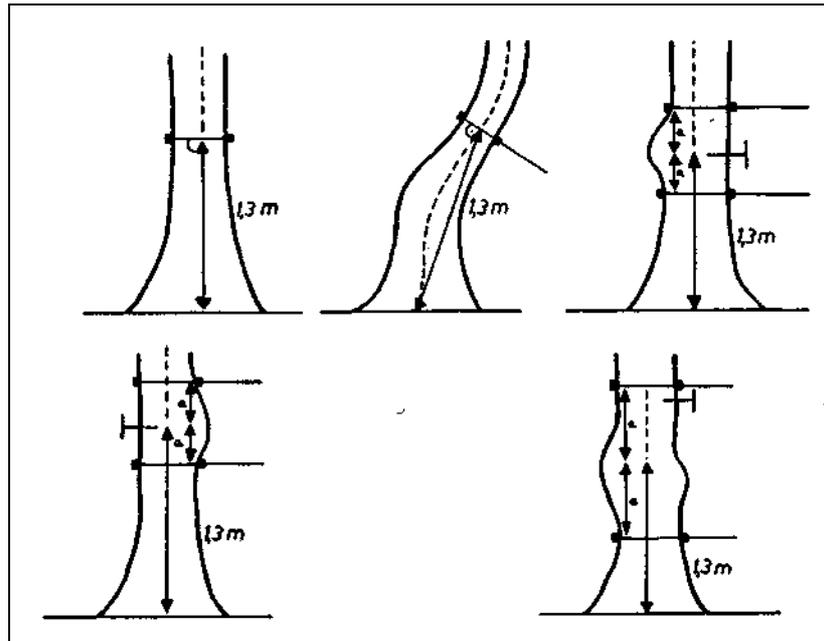


Figura 2.3. Medición del diámetro normal para la cubicación de pies en diversos casos y situaciones

Los materiales empleados en la medición de los diámetros son los siguientes:

- Cintas métricas
- Cintas π
- Forcípulas (Figura 2.4)

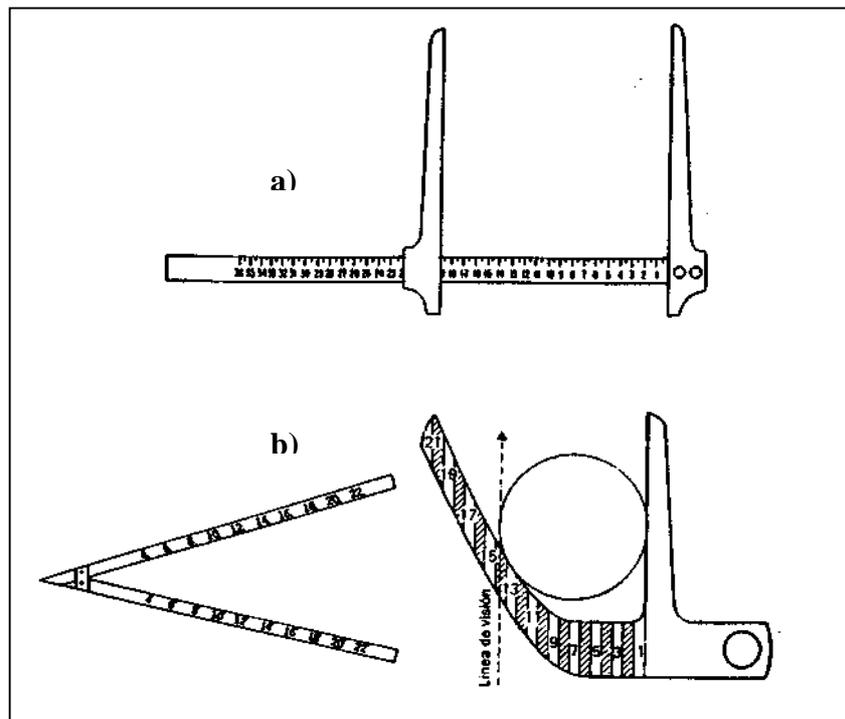


Figura 2.4. Forcípulas para medición del diámetro
a) de brazo móvil
b) finlandesa

La medición del área basimétrica es muy importante, hasta tal punto que se considera al diámetro como el parámetro básico de medición y en el que menos errores deben cometerse para obtener una alta consistencia en las estimaciones volumétricas. La importancia de la estimación del área basimétrica radica en:

1. La suma de áreas basimétricas de todos los árboles de la masa será la medida de las existencias, de la productividad y de la predicción de crecimientos
2. La masas forestales vendrán definidas en función de las frecuencias de los diferentes diámetros y por el área basimétrica total de las mismas
3. El incremento en volumen de la masa será aproximadamente proporcional al incremento diametral más que al incremento en altura y más también que al cambio de forma
4. El error relativo en la medición del diámetro pesa el doble que el cometido en la medición de la altura, en la estimación del volumen del árbol

2.3.3. ALTURA TOTAL

La altura es un parámetro igualmente no derivado del árbol. La altura es una variable muy importante a medir, pues es la que mejor refleja el grado de fertilidad de un determinado sitio (calidad de estación). Para una misma edad, árboles más altos estarían desarrollándose sobre mejores calidades de estación.

Normalmente la altura se mide sobre la distancia vertical desde el suelo hasta una determinada sección de referencia. Así si la sección de referencia es la cima del árbol, obtendremos la altura total, y si se toma el denominado diámetro en punta delgada, obtendríamos la altura de fuste (altura comercial). Las alturas se pueden medir con cintas métricas si el árbol está apeado, y si está en pie con hipsómetros.

El diámetro en punta delgada queda definido hasta la sección del árbol en que es posible el aprovechamiento del tronco, entorno a los 7 cm, aunque si después la madera fuera destinada a la fabricación de muebles, podría aumentarse el diámetro en punta delgada hasta los 20 cm.

2.3.4. FORMA

Al hablar de la forma del árbol bien podríamos aludir al término porte del árbol, si bien este término nos parece más selvícola que dendrométrico. La forma de árbol no es sino el mejor reflejo del efecto de las condiciones del sitio sobre el propio desarrollo del pie. No es lo mismo un pino carrasco de Liétor que uno de Cazorla, por lo menos en forma seguro que no. No es posible pues describir la forma genérica de una especie pues habría multitud de particularidades.

Conocida es también la gran influencia de los tratamientos selvícolas en la forma del árbol, pues con ella se estructura la competencia de los pies que van quedando en la masa, al ir apeando los otros. Así, es bien sabido que en masas espesas los árboles crecerán más en altura, para buscar la escasa luz que les

permita realizar su principal misión, la fotosíntesis, mientras que en ausencia de competencia, crecerán más en diámetro.

En definitiva, el término forma también deberá incluirse en las ecuaciones de cubicación que posteriormente desarrollaremos. La variable forma puede ir implícita en los modelos teóricos de cubicación, como es el caso de la cubicación teórica mediante los tipos dendrométricos, o también se integrará en las fórmulas de cubicación a través de coeficientes, denominados mórficos o de forma, cuyo objetivo será reducir los volúmenes obtenidos al considerar a los troncos de los árboles como cuerpos completamente cilíndricos, de secciones circulares perfectas.

2.4. CUBICACIÓN TEÓRICA DEL ÁRBOL

2.4.1. INTRODUCCIÓN

Desde hace ya más de un siglo, la aspiración a elevar cualquier conocimiento empírico a la categoría de ciencia exacta influyó también notablemente en la disciplina de la Dasometría. La cubicación teórica pretende abstraer la realidad para modelizarla, es decir, se intenta pensar que el tronco del árbol es una figura geométrica perfecta, cuyo volumen es calculable aplicando los métodos del cálculo diferencial. No obstante, D. Lucas Olazábal (1.883), ya avisa sobre la necesidad de saber *qué es lo que se está aplicando*: "los más seguros, a la par que más científicos, son los que, partiendo del principio de que el tronco es tronco, y no una forma definida, contrastan y rectifican todas las operaciones puramente estereométricas, con los resultados operando directamente sobre el tronco".

La teoría geométrica de la determinación de volúmenes nos hace realizar comparaciones de las formas de los troncos con cuerpos geométricos. Se parte pues de la hipótesis de cálculo de que el tronco del árbol es un sólido de revolución que será engendrado al hacer girar sobre un eje de simetría una línea característica del perfil de dicho tronco. Esta teoría de cálculo se fundamenta en el **Principio de Cavalieri*** que dice: "cuerpos que a alturas iguales tienen secciones planas paralelas de la misma área, tendrán entonces el mismo volumen" (Figura 2.4):

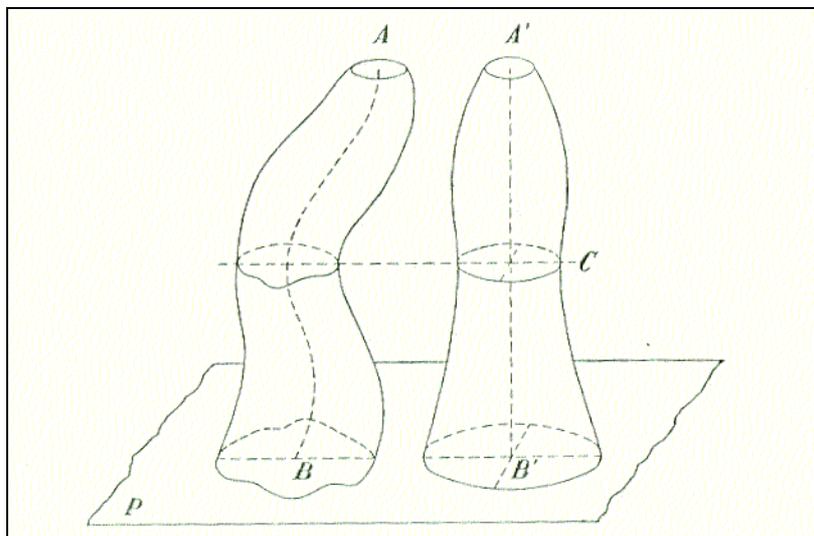


Figura 2.5. Principio de Cavalieri

Según este principio si las secciones de ambos cuerpos en los planos horizontales de referencia A, B y C (Figura 2.5) poseen áreas iguales, sus volúmenes serán también iguales pese a tener formas distintas. Podría admitirse entonces el cálculo del volumen para todo tipo de pies, incluso para aquellos cuyos troncos no son de sección completamente circular regular.

***BUENAVENTURA CAVALIERI** (1518 - 1583). Geómetra italiano que marca una nueva época en la historia de las Matemáticas. Crea la 'Geometría de los invisibles', método que facilita y precede al Cálculo Infinitesimal. Entre sus obras más importantes, cabe citar: Tratado de las secciones cónicas, Geometría indivisibilibus, Trigonometría plana et spherica, Exercitationes geometrio sex.

Las cubitaciones teóricas deberán fundamentarse en este principio, asimilando las secciones de cálculo como circulares correspondientes a figuras perfectas de referencia, debiendo tenerse en cuenta que (MACKAY, 1964):

1. Los perfiles teóricos de los troncos deben ser regulares y expresados con aproximación aceptable por una curva matemática relativamente sencilla de aplicar
2. Los perfiles serán ciertos no para largos troncos enteros, sino más bien para porciones dentro de ellos: estos trozos pedirán distintas expresiones algebraicas distintas, adecuadas al caso
3. En árboles con el tronco deformado, los cambios de dirección respecto a la vertical distorsionarán los valores de diámetros y secciones, y éstas vendrán más o menos deformadas. Además, la presencia de discontinuidades o ramas viejas origina muñones y puntos angulosos, difíciles de tener en cuenta

Según los tres postulados anteriores, se intentará obtener un volumen de revolución generado al girar una recta característica del perfil del árbol alrededor de un eje de referencia. Al sólido de revolución engendrado por la rotación alrededor de un eje de simetría de una línea característica se le denomina **Tipo dendrométrico**.

Este perfil o curva meridiana del sólido, es en definitiva la silueta del tronco, esto es, su proyección ortogonal a un plano paralelo a su eje de simetría. Si pudiéramos obtener una expresión analítica para este perfil, podría deducirse de ella una ley de cálculo de volumen perfecta, es decir $y = S(x)$ y su integral precisamente será el volumen en función de las distancias de referencia (x) (Figura 2.6):

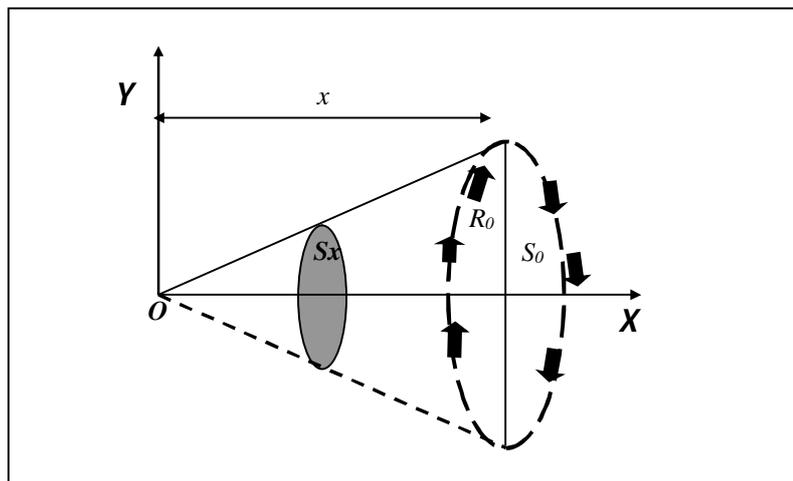


Figura 2.6. Definición de un sólido de revolución mediante una línea de perfil

No obstante, la búsqueda de esta expresión debe cumplir los requisitos de sencillez y facilidad de aplicación, siendo las ecuaciones generales de las líneas de perfil antes definidas una familia de curvas del tipo $y^2 = px^n$, en donde n es un índice que nos dará la forma del perfil (línea recta, curva, paralela al eje) y p el factor de amplitud de dicha recta. Para concretar y definir los diferentes tipos, n

tomará valores enteros, comprendidos entre 0 y 3, en función de los cuales se definirá un perfil u otro (Figura 2.7).

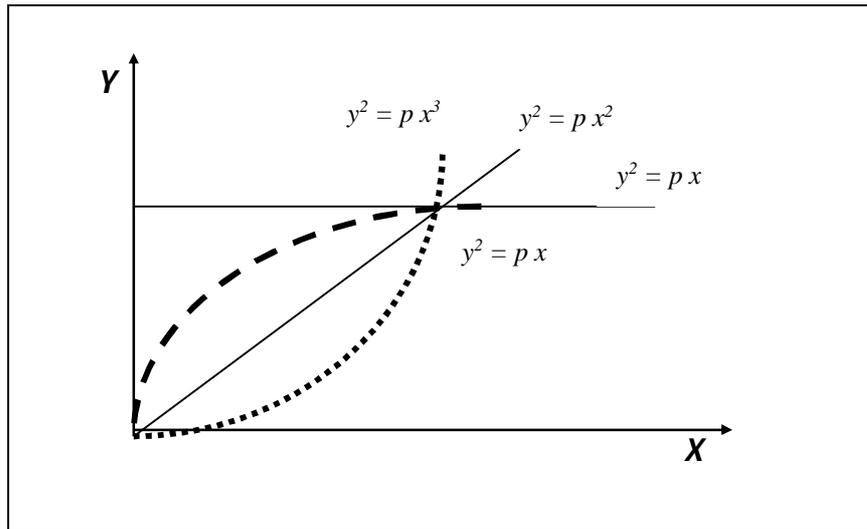


Figura 2.7. Líneas de perfil de los tipos dendrométricos

Cada una de las líneas de perfil generará un sólido diferente en su giro sobre el eje x . En la Tabla 2.1 aparecen recogidos los diferentes sólidos de revolución generados por cada uno de los perfiles que constituyen la familia de curvas:

Exponente característico (n)	Tipo dendrométrico	Ecuación de perfil
$n=0$	Cilindro	$y^2 = p$
$n=1$	Paraboloide	$y^2 = px$
$n=2$	Cono	$y^2 = px^2$
$n=3$	Neiloide	$y^2 = px^3$

Tabla 2.1. Tipos dendrométricos generados por las líneas de perfil

En la Figura 2.8 aparecen representadas las curvas así como los sólidos de revolución por ellas generados. Como se dijo es difícil que un tronco se ajuste a alguna de estas formas en toda su longitud. Lo más normal es que se aproxime a varios tipos y haya que definir entonces una ecuación para cada uno de los tramos.

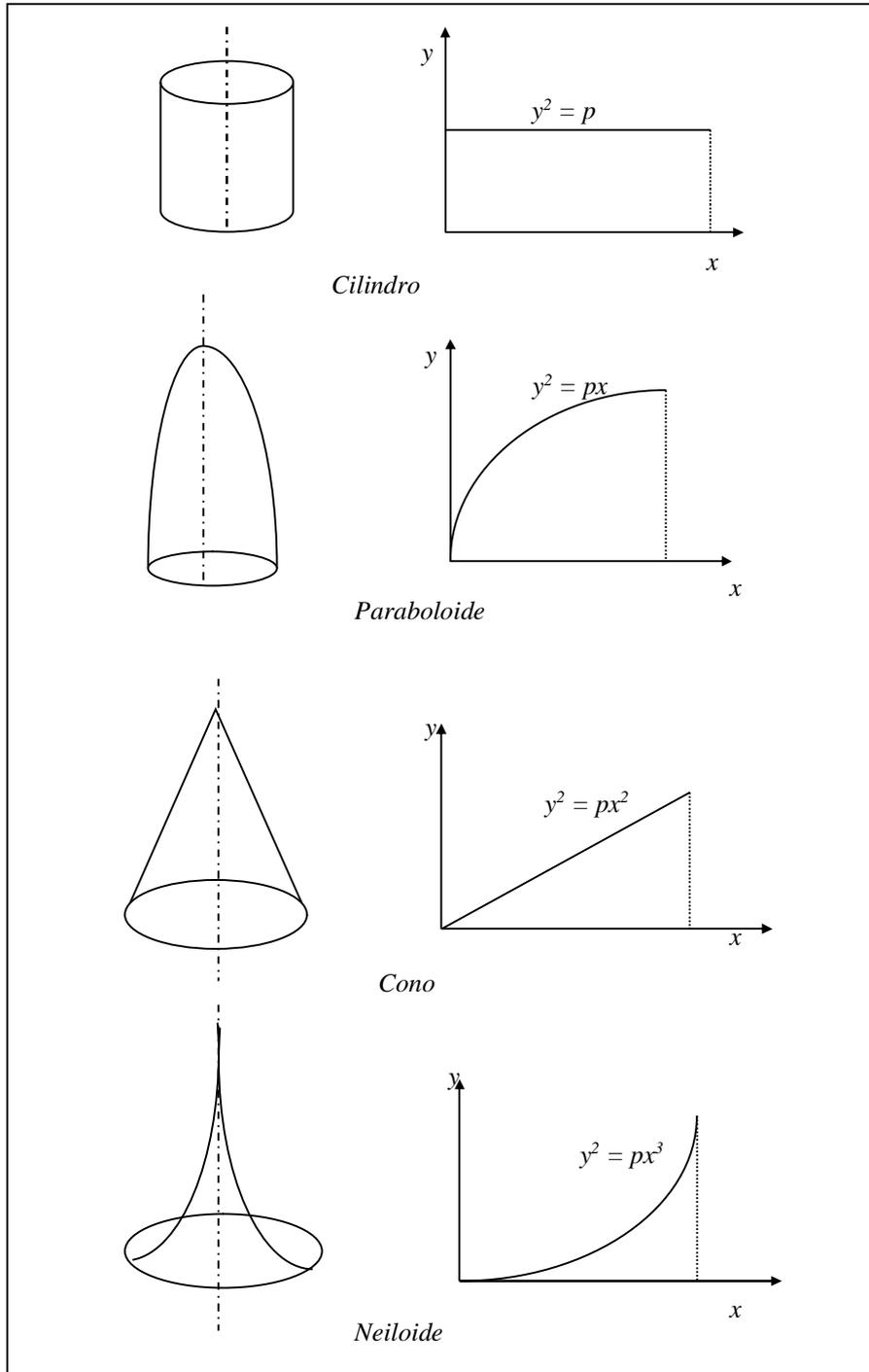


Figura 2.8. Tipos dendrométricos y líneas de perfil

Se ha comprobado que el tipo cilindro se acomoda al fuste corto de las frondosas en masas densas, el paraboloido se suele encontrar en coníferas de masas regulares, el cono en masas claras de coníferas en estado de latizal y frondosas aclaradas, y el neiloide en árboles aislados, eucaliptos en montes de llanura o en árboles tropicales.

2.4.2. CÁLCULO DE SECCIONES EN LOS TIPOS DENDROMÉTRICOS

Sea el tipo dendrométrico generado por la ecuación teórica del perfil $y^2 = p x^n$ (Figura 2.9):

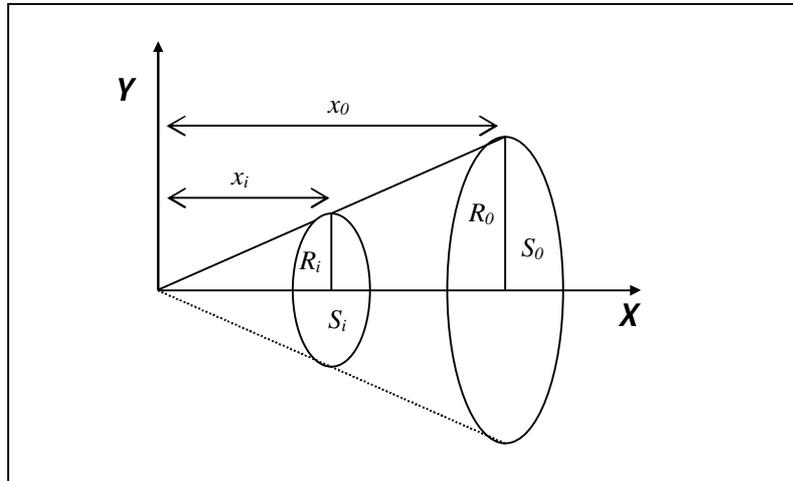


Figura 2.9. Secciones en los tipos dendrométricos

Para una determinada sección calcularemos su área como si se tratase de una sección completamente circular:

$$S_i = \pi \times R_i^2$$

El radio de cualquier sección vendrá determinado por la ecuación del perfil que genera el tipo dendrométrico, es decir, se cumplirá que $R = y$:

$$S_i = \pi \times y_i^2$$

Por tanto la expresión de cálculo de la sección genérica del tipo dendrométrico será:

$$S_i = \pi \times p x_i^n$$

Esta expresión es posible particularizarla al caso de las secciones base y media del tipo dendrométrico, sustituyendo el valor de x por las alturas correspondientes:

- ✓ Para la sección de la base: $x = h \Rightarrow S_0 = \pi \times p h^n$
- ✓ Para la sección en la mitad: $x = \frac{h}{2} \Rightarrow S_M = \pi \times p \left(\frac{h}{2}\right)^n$

A partir de esas expresiones es fácil encontrar la relación entre la sección en la mitad (S_M) y la sección en la base (S_0) de un determinado tipo dendrométrico:

$$S_M = \pi \times p h^n \times \frac{1}{2^n}$$

Finalmente vemos que:

$$S_M = \frac{S_0}{2^n}$$

Mediante el cálculo de las secciones mitad y en la base es posible determinar a que tipo dendrométrico se ajustaría el tronco de un árbol, precisamente según la relación entre ambas secciones:

✓ Cilindro: $S_M = \frac{S_0}{2^0} = S_0$

✓ Paraboloides: $S_M = \frac{S_0}{2^1} = \frac{S_0}{2}$

✓ Cono: $S_M = \frac{S_0}{2^2} = \frac{S_0}{4}$

✓ Neiloide: $S_M = \frac{S_0}{2^3} = \frac{S_0}{8}$

Análogamente se procedería con el estudio de los diámetros medios y extremos, siendo posible saber a que tipo dendrométrico se aproxima el tronco de un árbol mediante las relaciones diametrales de las secciones en la mitad (d_M) y la base (d_0):

✓ Cilindro $\Rightarrow \frac{\pi}{4} \times d_M^2 = \frac{\pi}{4} \times d_0^2 \Rightarrow d_M = d_0$

✓ Paraboloides $\Rightarrow \frac{\pi}{4} \times d_M^2 = \frac{\frac{\pi}{4} \times d_0^2}{2}; d_M = \sqrt{\frac{d_0^2}{2}} = \frac{d_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow d_M = \frac{d_0}{\sqrt{2}}$

✓ Cono $\Rightarrow \frac{\pi}{4} \times d_M^2 = \frac{\frac{\pi}{4} \times d_0^2}{4}; d_M = \sqrt{\frac{d_0^2}{4}} = \frac{d_0}{\sqrt{4}} \Rightarrow d_M = \frac{d_0}{2}$

✓ Neiloide $\Rightarrow \frac{\pi}{4} \times d_M^2 = \frac{\frac{\pi}{4} \times d_0^2}{8}; d_M = \sqrt{\frac{d_0^2}{8}} = \frac{d_0}{\sqrt{8}} \Rightarrow d_M = \frac{d_0}{\sqrt{8}}$

2.4.3. CÁLCULO DEL VOLUMEN DE LOS TIPOS DENDROMÉTRICOS

Sea el tipo dendrométrico de altura h y sección en la base S_0 , generado al girar el perfil $y^2 = p x^n$ sobre el eje x . Para calcular el volumen total del tipo dendrométrico se aislará un elemento diferencial (dV) del volumen total (Figura 2.10):

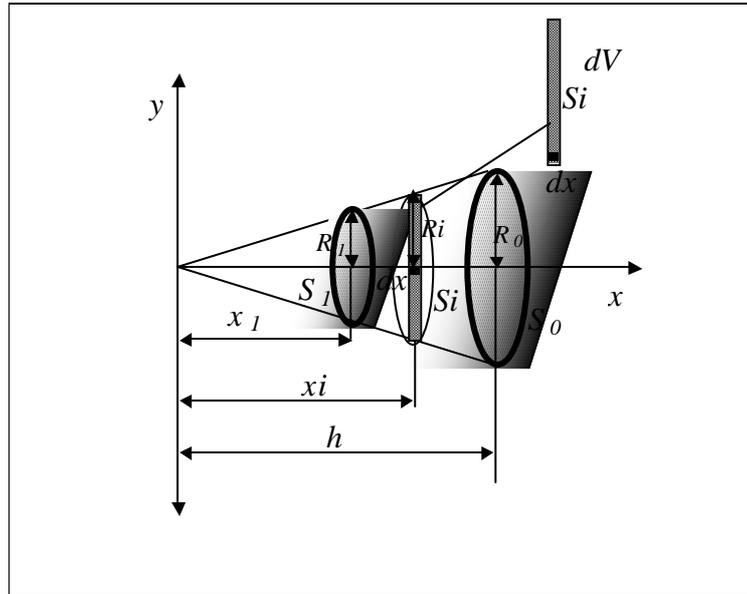


Figura 2.10. Cálculo del volumen para un tipo dendrométrico genérico

El volumen del elemento diferencial aislado será:

$$dV = S_i \times dx$$

$$dV = \pi R_i^2 dx$$

Por propia geometría se cumple que:

$$y = R \rightarrow y^2 = R^2; R^2 = p x^n$$

Por tanto:

$$dV = \pi p x^n dx$$

Si resolvemos esta ecuación diferencial (despejamos V) obtendremos el volumen total de un tipo dendrométrico genérico de altura h :

$$V = \int_0^h \pi p x^n dx = \pi p \int_0^h x^n dx$$

$$V = \pi p \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right)_0^h = \pi p \frac{h^{n+1}}{n+1} = \pi p \frac{h^n \times h}{n+1} = \pi p h^n \frac{h}{n+1}$$

Finalmente sabiendo que $S_0 = \pi p h^n$, el volumen teórico de cualquier tipo dendrométrico vendrá dado por la siguiente expresión:

$$V = \frac{S_0 \times h}{n + 1}$$

De esta forma el volumen teórico para los 4 tipos dendrométricos estudiados queda particularizado de la siguiente manera:

- Cilindro: $V = S_0 \times h$
- Paraboloides: $V = \frac{S_0 \times h}{2}$
- Cono: $V = \frac{S_0 \times h}{3}$
- Neiloide: $V = \frac{S_0 \times h}{4}$

Esas fórmulas permiten la cubicación teórica de cada uno de los tipos dendrométricos. Si se quiere cubicar un árbol mediante la teoría de los tipos dendrométricos, deberíamos averiguar primero a que tipo se ajustaría su tronco. Para ello podemos utilizar varios procedimientos, algunos de ellos ya reseñados:

- 1) En primer lugar de "visu" podemos apreciar si se el tronco se ajusta más o menos a un tipo determinado, si bien este método nos parece poco aconsejable (gran subjetividad)
- 2) Podemos aplicar las relaciones entre las secciones en la base y en la mitad ($S_M = \frac{S_0}{2^n}$) ó entre sus correspondientes diámetros
- 3) Otro procedimiento más adecuado sería medir los diámetros en distintas secciones del tronco y establecer las relaciones entre dichas secciones, lo que nos permitirá deducir las ecuaciones teóricas del perfil y ver donde va cambiando el tipo dendrométrico en el árbol. Por ejemplo, estableceremos la relación entre las secciones conocidas S_1 y S_2 :

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{\pi}{4} d_1^2}{\frac{\pi}{4} d_2^2} = \frac{\pi p x_1^n}{\pi p x_2^n}$$

Simplificando:

$$\frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{x_1^n}{x_2^n}$$

Para resolver esta expresión despejando n tomaremos previamente logaritmos neperianos en ambos miembros:

$$\ln\left(\frac{d_1^2}{d_2^2}\right) = \ln\left(\frac{x_1^n}{x_2^n}\right)$$

$$2\ln\left(\frac{d_1}{d_2}\right) = n\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

Finalmente el exponente característico n tendrá por expresión:

$$n = \frac{2\ln\frac{d_1}{d_2}}{\ln\frac{x_1}{x_2}}$$

Una vez determinado el valor de n podríamos saber a que tipo dendrométrico se ajusta el tronco del árbol, así como las secciones en las cuales se produce una variación en su valor (variaría también entonces el tipo dendrométrico).

Para deducir la expresión completa de la línea de perfil del tipo dendrométrico faltaría calcular además el factor de amplitud p . Conociendo el diámetro de una sección situada a una determinada distancia de la cima podría obtenerse el factor de amplitud. Si todo el pie pertenece a un mismo tipo dendrométrico sólo calcularemos un único valor de p , pero si cada tramo se ajusta a un tipo distinto deberemos obtener los distintos valores de p por cada línea de tramo:

$$p = \frac{y^2}{x^n}$$

$$p = \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2}{x^n}$$

Se comprueba que es muy frecuente que en el tronco del árbol aparezcan recogidos varios tipos dendrométricos. Como hecho muy generalizado vemos como el tronco de los árboles se va estrechando conforme nos acercamos al ápice puesto que se hace más cónico. Este hecho irrefutable lo han intentado explicar algunas teorías científicas, entre las cuales destacaremos las siguientes:

- 1) Teoría de las ramas: conforme ascendamos en sección por el tronco van apareciendo las ramas y éstas le quitarían energía y nutrientes al tronco, por lo que éste se iría estrechando
- 2) Teoría de la resistencia a la fuerza del viento: el árbol está sometido a una fuerza producida por el viento; esta fuerza es mayor en las secciones cercanas al suelo, por eso los pies son más gruesos en la base
- 3) Teoría del modelo de las pipetas o conductos: Shinozaki, Yoda, Hozumi y Kira (1964a y 1964b) afirman que la cantidad de tejido no

fotosintéticamente activo (madera) existente en un árbol a un determinado nivel z , decrece conforme ascendemos en altura en proporción a la cantidad de hojas que hay por encima de ese nivel z . Según la teoría de Shinozaki *et al.*, la base de la copa tendría la sección máxima y debería ser constante hasta la base del árbol, ya que la cantidad de tejidos conductores que pasan por la sección de la base de la copa es la misma que en la base del árbol. No obstante vemos que esto no ocurre y la sección del árbol se ensancha conforme descendemos por el tronco. Ello se explica porque en la base del árbol existen conductos muertos que abastecieron a la planta joven constituyendo ahora lo que se denomina duramen. Por tanto, cuando un árbol disponga de una copa poco densa y corta, el tronco tendrá una sección bastante constante, del tipo paraboloide. En caso de que la copa sea profunda el tronco se ajustaría más a un neiloide.

2.4.4. CÁLCULO DEL VOLUMEN DE UNA TROZA PERTENECIENTE A UN TIPO DENDROMÉTRICO

Al igual que es posible cubicar troncos enteros mediante la teoría de los tipos dendrométricos, es posible cubicar cualquier troza correspondiente a un sólido de revolución generado por la línea de perfil $y^2 = px^n$. Sea la troza de un tipo dendrométrico genérico definida por las secciones extremas S_1 y S_2 (Figura 2.11):

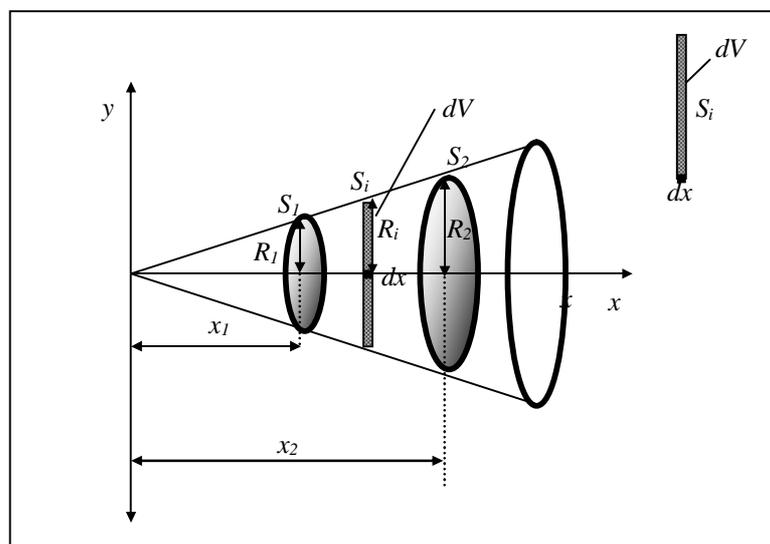


Figura 2.11. Cálculo del volumen de una troza de un tipo dendrométrico genérico

Una vez aislado un elemento diferencial perteneciente a la troza tendremos que su volumen (dV) será:

$$dV = S_i \times dx$$

La ecuación diferencial se resolverá despejando V entre los límites de integración definidos por las posiciones de las secciones extremas:

$$V = \int_{x_1}^{x_2} \pi p x_i^n dx = \pi p \int_{x_1}^{x_2} x_i^n dx = \pi p \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_{x_1}^{x_2} = \pi p \left[\frac{x_2^{n+1} - x_1^{n+1}}{n+1} \right]$$

$$V = \frac{\pi p x_2^{n+1} - \pi p x_1^{n+1}}{n+1} = \frac{\pi p x_2^n \times x_2 - \pi p x_1^n \times x_1}{n+1}$$

$$V = \frac{S_2 x_2 - S_1 x_1}{n+1}$$

Quiere esto decir que el cálculo del volumen de cualquier troza de los tipos dendrométricos se deberá realizar en función de las secciones extremas que la definen.

2.5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MACKAY, E. (1964). *Dasometría*. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Montes. Madrid.

OLAZÁBAL, L. (1883). *Ordenación y Valoración de Montes*. 1ª Ed. Madrid.

PARDÉ, J. & BOUCHON, J. (1961). *Dendrometrie*. École Nationale du Génie Rural des Eaux et Forêts (ENGREF). Nancy.

PITA CARPENTER, P.A. (1979). *Apuntes de Dasometría (Tomo I)*. Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Forestal. Madrid.

SHINOZAKI, K., YODA, K., HOZUMI, K., and KIRA, T. (1964a). *A quantitative analysis of plant form the pipe model theory. I. Basic analyses*. Japanese Journal of Ecology 14: 97 105.

SHINOZAKI, K., YODA, K., HOZUMI, K. and KIRA, T. (1964b). *A quantitative analysis of plant form the pipe model theory. II. Further evidence of the theory and its application in forest ecology*. Japanese Journal of Ecology 14: 133 139.

TEMA 3. CUBICACIÓN DEL ÁRBOL (II)

- I. MÉTODOS DE CUBICACIÓN COMERCIAL: FÓRMULA DE HUBER, SMALIAN Y BAREMOS DE CUBICACIÓN
- II. MÉTODOS DE CUBICACIÓN REAL O EXACTA: POR SECCIONES DE IGUAL LONGITUD (MÉTODO DE CUBICACIÓN DE ÁRBOLES TIPO), FÓRMULA DE NEWTON Y FÓRMULA DE SIMPSON
- III. MÉTODO DE PRESSLER- BITTERLICH
- IV. OTROS MÉTODOS DE CUBICACIÓN: CUBICACIÓN POR TROZAS DE LONGITUD DESIGUAL, CUBICACIÓN POR COEFICIENTES MÓRFICOS, CUBICACIÓN POR FÓRMULAS RÁPIDAS O ABREVIADAS Y MÉTODO DE CUBICACIÓN UTILIZADO EN EL INVENTARIO FORESTAL FRANCÉS

3.1. MÉTODOS DE CUBICACIÓN COMERCIAL: FÓRMULA DE HUBER, SMALIAN Y BAREMOS DE CUBICACIÓN

3.1.1. INTRODUCCIÓN. DEFINICIÓN DE LAS EXPRESIONES DE CÁLCULO

Dado que es poco probable que los troncos de los árboles se ajusten completamente a tipos dendrométricos perfectos, en todo caso aunque así fuera habría que comprobarlo con la consiguiente pérdida de tiempo (y dinero), y teniendo en cuenta que muchas veces no se necesita mucha precisión en la práctica habitual del comercio de la madera, es por lo que, desde un punto de vista práctico, se pueden utilizar sencillas fórmulas de aplicar basadas normalmente en la medición de secciones medias o extremas de los troncos o trozas de los árboles. Estas fórmulas se pueden aplicar tanto a árboles en pie como apeados. Bajo esta filosofía de cubicación surgieron las denominadas fórmulas comerciales de Huber y Smalian:

1. **Fórmula de Huber (1828)**. Supone asimilar un árbol real a un árbol ideal de tipo dendrométrico cilindro, que tiene de sección la de la mitad de su altura y de altura la altura total del árbol (si fuese el fuste sería la sección a la mitad de la altura del fuste). También es aplicable esta fórmula para la cubicación de trozas:

$$V_{\text{HUBER}} = \frac{\pi}{4} \times d_M^2 \times h$$

Siendo d_M : diámetro en la mitad del tronco o de la troza
 h : altura del tronco o longitud de la troza

2. **Fórmula de Smalian (1837)**. Asimila el tronco real a un paraboloides y se calcula el volumen en función de la media de las secciones extremas (S_m) y de la altura del árbol o troza:

$$V_{\text{SMALIAN}} = S_m \times h$$

siendo $S_m = \frac{S_1 + S_2}{2}$; por tanto:

$$V_{SMALIAN} = S_m \times h = \frac{S_1 + S_2}{2} \times h ;$$

con S_1 y S_2 : secciones extremas del árbol o troza y h la altura total o longitud de la troza

3. Otro procedimiento, ya en desuso, que permite cubicar comercialmente los árboles es el de los denominados **baremos de cubicación**. Cuando hay que hacer muchos cálculos repetidos con la fórmula de Huber, para ahorrar tiempo, se utilizan los varemos de cubicación que son tablas de doble entrada, es decir, fórmulas de dos variables independientes. Existen dos tipos de varemos de cubicación y han sido utilizados fundamentalmente en Francia:
 - a) Baremos de cubicación para árboles apeados. Un ejemplo es el de CHAUDÉ y DECESSE (1983), los cuales nos dan el volumen en función de la circunferencia a la mitad de la troza (variando de cm en cm a partir de 30 cm) y la longitud (variando de 10 en 10 cm a partir de 0,10 m)
 - b) Baremos de cubicación para árboles en pie; en este tipo de medición hay parámetros que no se miden sino que se estiman a partir de otros. Consisten en la aplicación de la fórmula de Huber, siendo calculado el d_M a partir del d_n :

$$V = f(d_n, h_d, \delta) = \frac{\pi}{4} \times \left[d_n - \delta \times \left(\frac{h_d}{2} - 1,30 \right) \right]^2$$

Donde:

d_n ; diámetro normal

h_d ; altura del árbol medida por encima del tocón

δ ; decrecimiento medio del diámetro entre 1,30 y $\frac{h_d}{2}$

Sólo se mide el d_n , los demás parámetros se estimarán a través de δ . Hay autores que miden adicionalmente otros parámetros para incluirlos en los baremos de cubicación:

- ✓ CHAUDÉ (1988) utiliza también el término *decrecimiento de la circunferencia*. Introduce 20 baremos en función del d_n , uno para cada una de las clases diamétricas. Cada clase diamétrica podría tener 1 ó 2 tipos de decrecimiento diferentes con lo que así se cubriría toda la gama de decrecimientos dentro de un mismo d_n .
- ✓ SCHAEFFER (1950) crea 10 pares de baremos (10 para diámetros y otros 10 para circunferencias) basados en un *coeficiente de decrecimiento* (r) cuya fórmula es la siguiente:

$$r = \frac{\text{circunferencia a mitad de la altura}}{\text{circunferencia normal}}$$

Se comprueba que r es función de los siguientes parámetros:

- longitud del tronco
- diámetro mínimo de corta

- especie
- tratamiento, calidad de estación, etc
- grosor del tronco

A partir de r se obtendrá el volumen del árbol aplicando tarifas de cubicación.

3.1.2. CÁLCULO DE ERRORES EN LAS FÓRMULAS DE VOLÚMENES COMERCIALES

Si bien como hemos apuntado, las fórmulas comerciales son sencillas y rápidas de aplicar, deberemos no obstante conocer el grado de incertidumbre o error cometido al utilizarlas para cubicar, tanto en troncos enteros como trozas. Para simplificar el estudio de los errores cometidos vamos a imaginar que los árboles pertenecen a un tipo dendrométrico perfecto, del cuál conocemos su volumen teórico real. Una vez calculado el volumen comercial, podremos determinar tanto el error absoluto como el relativo, de acuerdo a la magnitud de la diferencia entre los valores calculados mediante ambos procedimientos:

✓ *Error absoluto (E):* $E = V_T - V_C$

Siendo: V_T : volumen teórico
 V_C : volumen comercial

✓ *Error relativo (r):* $r = \frac{E}{V_T}$ $r(\%) = \frac{E}{V_T} \times 100$

ERRORES ABSOLUTOS COMETIDOS AL APLICAR LAS FÓRMULAS DE HUBER Y SMALIAN A TRONCOS ENTEROS

1. Cilindro:

a) Volumen teórico:

$$V_T = \frac{S_0 \times h}{n+1} = \frac{S_0 \times h}{0+1} = S_0 \times h$$

b) Volumen mediante la fórmula de Huber:

$$V_H = S_M \times h = S_0 \times h; \quad V_T = V_H \Rightarrow \text{no se comete error}$$

c) Volumen mediante la fórmula de Smalian:

$$V_S = \left(\frac{S_2 + S_1}{2} \right) \times h; \quad S_0 = S_1 = S_2; \quad V_S = \left(\frac{S_0 + S_0}{2} \right) \times h = S_0 \times h;$$

$$V_T = V_S \Rightarrow \text{no se comete error}$$

2. Paraboloides:

a) Volumen teórico:

$$V_T = \frac{S_0 \times h}{n+1} = \frac{S_0 \times h}{1+1} = \frac{S_0 \times h}{2}$$

b) Volumen mediante la fórmula de Huber:

$$V_H = S_M \times h = \frac{S_0}{2} \times h; \quad V_T = V_H \Rightarrow \text{no se comete error}$$

c) Volumen mediante la fórmula de Smalian:

$$V_S = \left(\frac{S_2 + S_1}{2} \right) \times h; \quad S_0 = S_2; S_1 = 0 \quad V_S = \left(\frac{0 + S_0}{2} \right) \times h = \frac{S_0}{2} \times h$$

$$V_T = V_S \Rightarrow \text{no se comete error}$$

3. Cono:

a) Volumen teórico:

$$V_T = \frac{S_0 \times h}{n+1} = \frac{S_0 \times h}{2+1} = \frac{S_0 \times h}{3}$$

b) Volumen mediante la fórmula de Huber:

$$V_H = S_M \times h = \frac{S_0}{2^2} \times h = \frac{S_0 \times h}{4}; \quad V_T \neq V_H \Rightarrow \text{Existe error}$$

$$E_H = \frac{S_0 \times h}{3} - \frac{S_0 \times h}{4} = \frac{S_0 \times h}{12} \quad (\text{es un error por defecto: } V_T > V_H)$$

c) Volumen mediante la fórmula de Smalian:

$$V_S = \left(\frac{S_2 + S_1}{2} \right) \times h; \quad S_0 = S_2; S_1 = 0 \quad V_S = \left(\frac{0 + S_0}{2} \right) \times h = \frac{S_0 \times h}{2};$$

$$V_T \neq V_S \Rightarrow \text{Existe error}$$

$$E_S = \frac{S_0 \times h}{3} - \frac{S_0 \times h}{2} = -\frac{S_0 \times h}{6} \quad (\text{es un error por exceso: } V_T < V_S)$$

4. Neiloide:

a) Volumen teórico:

$$V_T = \frac{S_0 \times h}{n+1} = \frac{S_0 \times h}{3+1} = \frac{S_0 \times h}{4}$$

b) Volumen mediante la fórmula de Huber:

$$V_H = S_M \times h = \frac{S_0}{2^3} \times h = \frac{S_0 \times h}{8}; V_T \neq V_H \Rightarrow \text{Existe error}$$

$$E_H = \frac{S_0 \times h}{4} - \frac{S_0 \times h}{8} = \frac{S_0 \times h}{8} \text{ (es un error por defecto: } V_T > V_H \text{)}$$

c) Volumen mediante la fórmula de Smalian:

$$V_S = \left(\frac{S_2 + S_1}{2} \right) \times h; S_0 = S_2; S_1 = 0 \quad V_S = \left(\frac{0 + S_0}{2} \right) \times h = \frac{S_0 \times h}{2};$$

$V_T \neq V_S \Rightarrow$ Existe error

$$E_S = \frac{S_0 \times h}{4} - \frac{S_0 \times h}{2} = -\frac{S_0 \times h}{4} \text{ (es un error por exceso: } V_T < V_S \text{)}$$

ERRORES RELATIVOS COMETIDOS AL APLICAR LAS FÓRMULAS DE HUBER Y DE SMALIAN A TRONCOS ENTEROS

1. Cilindro ($V_T = S_0 \times h$):

✓ Fórmula de Huber:

$$E_H = 0$$

$$r_H = \frac{E_H}{V_T} = \frac{0}{S_0 \times h} = 0 \text{ (No hay error)}$$

✓ Fórmula de Smalian:

$$E_S = 0$$

$$r_S = \frac{E_S}{V_T} = \frac{0}{S_0 \times h} = 0 \text{ (No hay error)}$$

2. Paraboloide ($V_T = \frac{S_0 \times h}{2}$):

✓ Fórmula de Huber:

$$E_H = 0$$

$$r_H = \frac{E_H}{V_T} = \frac{0}{\frac{S_0 \times h}{2}} = 0 \text{ (No hay error)}$$

✓ Fórmula de Smalian:

$$E_S = 0$$

$$r_S = \frac{E_S}{V_T} = \frac{0}{\frac{S_0 \times h}{2}} = 0 \text{ (No hay error)}$$

3. **Cono** ($V_T = \frac{S_0 \times h}{3}$):

✓ Fórmula de Huber:

$$E_H = \frac{S_0 \times h}{12}$$

$$r_H = \frac{E_H}{V_T} = \frac{\frac{S_0 \times h}{12}}{\frac{S_0 \times h}{3}} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$$

✓ Fórmula de Smalian:

$$E_S = -\frac{S_0 \times h}{6}$$

$$r_S = \frac{E_S}{V_T} = \frac{-\frac{S_0 \times h}{6}}{\frac{S_0 \times h}{3}} = -\frac{1}{2} = -0,5 = -50\%$$

4. **Neiloide** ($V_T = \frac{S_0 \times h}{4}$):

✓ Fórmula de Huber:

$$E_H = \frac{S_0 \times h}{8}$$

$$r_H = \frac{E_H}{V_T} = \frac{\frac{S_0 \times h}{8}}{\frac{S_0 \times h}{4}} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$$

✓ Fórmula de Smalian:

$$E_S = -\frac{S_0 \times h}{4}$$

$$r_s = \frac{E_s}{V_T} = \frac{-\frac{S_0 \times h}{4}}{\frac{S_0 \times h}{4}} = -1 = -100\%$$

Un resumen de todos los errores calculados aparece en la tabla 3.1:

Tipo	V_T	V_H	V_S	E_H	E_S	r_H	r_S
Cilindro	$S_0 \times h$	$S_0 \times h$	$S_0 \times h$	0	0	0%	0%
Paraboloide	$\frac{S_0 \times h}{2}$	$\frac{S_0 \times h}{2}$	$\frac{S_0 \times h}{2}$	0	0	0%	0%
Cono	$\frac{S_0 \times h}{3}$	$\frac{S_0 \times h}{4}$	$\frac{S_0 \times h}{2}$	$\frac{S_0 \times h}{12}$	$-\frac{S_0 \times h}{6}$	25%	-50%
Neiloide	$\frac{S_0 \times h}{4}$	$\frac{S_0 \times h}{8}$	$\frac{S_0 \times h}{2}$	$\frac{S_0 \times h}{8}$	$-\frac{S_0 \times h}{4}$	50%	-100%

Tabla 3.1. Volúmenes comerciales para los tipos dendrométricos y errores cometidos en la cubicación de troncos completos

Donde:

V_T : volumen obtenido mediante tipos dendrométricos

V_H : volumen obtenido por la fórmula comercial de Huber

V_S : volumen obtenido por la fórmula comercial de Smalian

E_H : error absoluto cometido por la fórmula de Huber

E_S : error absoluto cometido por la fórmula de Smalian

r_H : error relativo cometido por la fórmula de Huber

r_S : error relativo cometido por la fórmula de Smalian

De los valores mostrados en la tabla 3.1 podemos deducir que:

1. Si un tronco se asemeja a un tipo cilindro o paraboloide el error cometido es cero
2. Si se asemeja a un cono, por la fórmula de Smalian se comete error por exceso, y por la fórmula de Huber un error por defecto
3. El error cometido por la fórmula de Smalian es el doble que el cometido por la fórmula de Huber

Representación gráfica de los errores relativos. Si representamos en un sistema de ejes coordenados los errores relativos de las fórmulas comerciales, se observa que el error cometido por la fórmula de Smalian siempre es doble y de diferente signo que el cometido con la fórmula de Huber. Además el error se incrementa al aumentar el exponente característico de los perfiles (n) (figura 3.1).

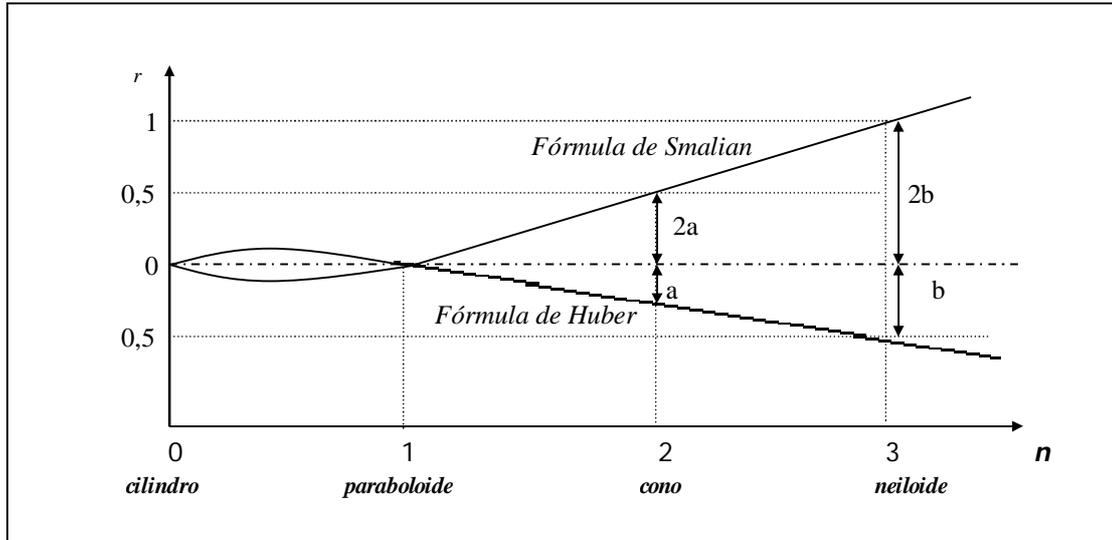


Figura 3.1. Representación de los errores relativos cometidos al aplicar las fórmulas comerciales a la cubicación de troncos completos

ERRORES COMETIDOS AL APLICAR LAS FÓRMULAS DE HUBER Y SMALIAN AL CÁLCULO DEL VOLUMEN DE TROZAS

Para calcular los errores cometidos por las fórmulas comerciales aplicadas a la cubicación de trozas, determinaremos primero el volumen teórico de la troza aplicando la teoría de los tipos dendrométricos, y después compararemos dicho valor con el aportado por las fórmulas de Huber y de Smalian.

1. Troza cilíndrica

Sea la troza cilíndrica de longitud l definida por las secciones extremas S_1 y S_2 : (figura 3.2):

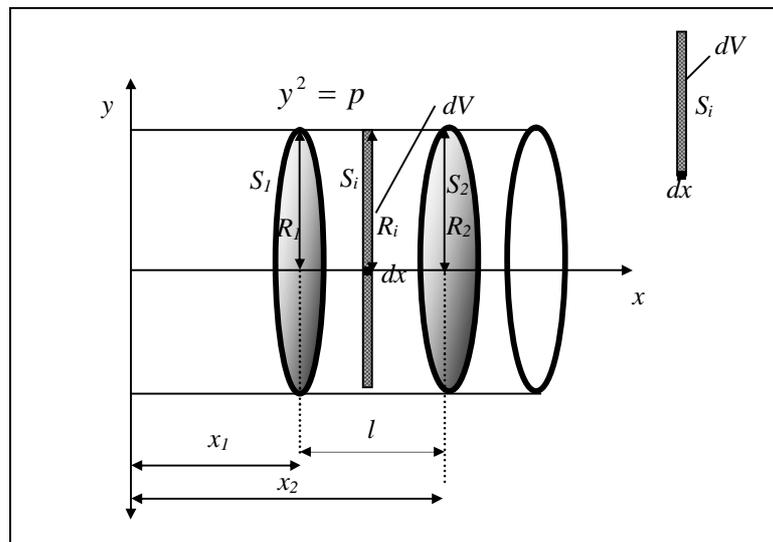


Figura 3.2. Troza cilíndrica para el cálculo de volúmenes comerciales

- Volumen teórico:

Se aislará un elemento diferencial con volumen $dV = S_i \times dx$

$$V_T = \int_{x_1}^{x_2} S_i dx = \int_{x_1}^{x_2} \pi p x^0 dx = \pi p \int_{x_1}^{x_2} dx = \pi p [x]_{x_1}^{x_2} = \pi p (x_2 - x_1) = \pi p l$$

- Fórmula de Huber:

$$V_H = S_M \times l = \pi p x_M^0 l = \pi p l \Rightarrow V_T = V_H \text{ (no hay error)}$$

- Fórmula de Smalian:

$$V_S = \left(\frac{S_1 + S_2}{2} \right) \times l = \left(\frac{\pi p x_1^0 + \pi p x_2^0}{2} \right) \times l = \frac{2\pi p l}{2} = \pi p l \Rightarrow V_T = V_S \text{ (no hay error)}$$

2. Troza parabolóide

Sea la troza parabólica de longitud l definida por las secciones extremas S_1 y S_2 (figura 3.3):

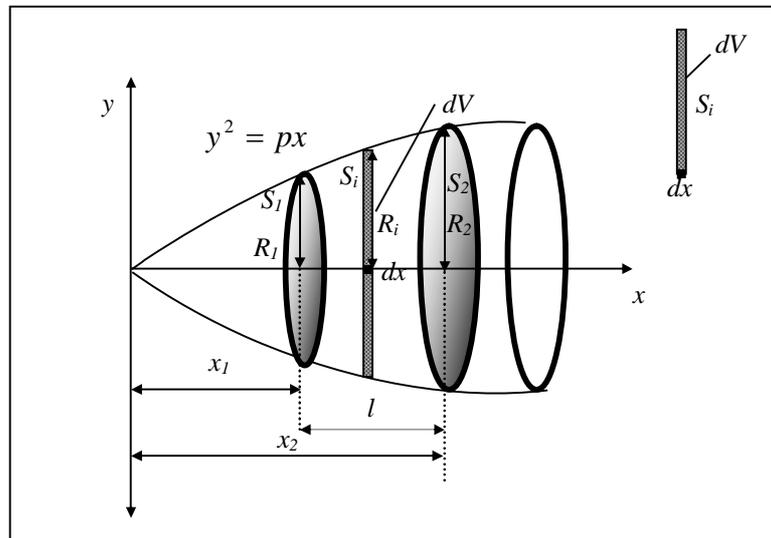


Figura 3.3. Troza parabolóide para el cálculo de volúmenes comerciales

- Volumen teórico:

Se aislará un elemento diferencial con volumen $dV = S_i \times dx$

$$V_T = \int_{x_1}^{x_2} S_i dx = \int_{x_1}^{x_2} \pi p x dx = \pi p \int_{x_1}^{x_2} x dx = \pi p \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_1}^{x_2} = \pi p \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} = \pi p \frac{(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)}{2} = \frac{\pi p}{2} (x_2 + x_1) l$$

$$V_T = \left(\frac{\pi p x_2 + \pi p x_1}{2} \right) \times l = \left(\frac{S_2 + S_1}{2} \right) \times l = S_m \times l$$

- Fórmula de Huber:

$$V_H = S_M \times l = \pi p x_M^1 l = \pi p \left(\frac{x_2 + x_1}{2} \right)^1 \times l = \left(\frac{\pi p x_2 + \pi p x_1}{2} \right) \times l = \left(\frac{S_2 + S_1}{2} \right) \times l = S_m \times l$$

$$V_T = V_H \text{ (no hay error)}$$

- Fórmula de Smalian:

$$V_S = \left(\frac{S_1 + S_2}{2} \right) \times l = \left(\frac{\pi p x_1^1 + \pi p x_2^1}{2} \right) \times l = \left(\frac{S_2 + S_1}{2} \right) \times l = S_m \times l$$

$$V_T = V_S \text{ (no hay error)}$$

3. Troza cónica

Sea la troza cónica de longitud l definida por las secciones extremas S_1 y S_2 (figura 3.4):

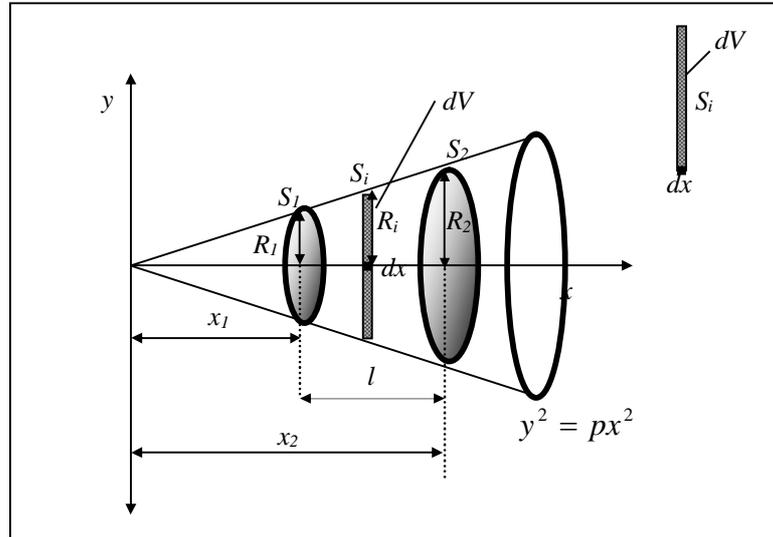


Figura 3.4. Troza cónica para el cálculo de volúmenes comerciales

- Volumen teórico:

Se aislará un elemento diferencial con volumen $dV = S_i \times dx$

$$V_T = \int_{x_1}^{x_2} S_i dx = \int_{x_1}^{x_2} \pi p x^2 dx = \pi p \int_{x_1}^{x_2} x^2 dx = \pi p \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x_1}^{x_2} = \pi p \frac{x_2^3 - x_1^3}{3} = \frac{\pi p}{3} (x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2) (x_2 - x_1)$$

$$V_T = \frac{\pi p}{3} (x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2) \times l$$

- Fórmula de Huber:

$$V_H = S_M \times l = \pi p x_M^2 l = \pi p \left(\frac{x_2 + x_1}{2} \right)^2 \times l = \frac{\pi p}{4} (x_2^2 + 2x_2 x_1 + x_1^2) \times l \Rightarrow V_T \neq V_H \quad (\exists \text{ error})$$

Error cometido por la fórmula de Huber:

$$E_H = \left[\frac{\pi p}{3} (x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2) \times l \right] - \left[\frac{\pi p}{4} (x_2^2 + 2x_2 x_1 + x_1^2) \times l \right]$$

$$E_H = \frac{\pi p l}{12} [4x_2^2 + 4x_1 x_2 + 4x_1^2 - 3x_2^2 - 6x_1 x_2 - 3x_1^2]$$

$$E_H = \frac{\pi p l}{12} [x_2^2 - 2x_1 x_2 + x_1^2] = \frac{\pi p l}{12} (x_2 - x_1)^2 = \frac{\pi p l^3}{12}$$

- Fórmula de Smalian:

$$V_S = \left(\frac{S_1 + S_2}{2} \right) \times l = \left(\frac{\pi p x_1^2 + \pi p x_2^2}{2} \right) \times l = \frac{\pi p l}{2} (x_1^2 + x_2^2) \Rightarrow V_T \neq V_S (\exists \text{ error})$$

Error cometido por la fórmula de Smalian:

$$E_S = \frac{\pi p l}{3} (x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2) - \frac{\pi p l}{2} (x_1^2 + x_2^2)$$

$$E_S = \frac{\pi p l}{6} [2x_2^2 + 2x_1 x_2 + 2x_1^2 - 3x_1^2 - 3x_2^2]$$

$$E_S = \frac{\pi p l}{6} [-x_2^2 + 2x_1 x_2 - x_1^2] = -\frac{\pi p l}{6} [x_2^2 - 2x_1 x_2 + x_1^2]$$

$$E_S = -\frac{\pi p l}{6} (x_2 - x_1)^2 = -\frac{\pi p l^3}{6}$$

4. Troza neiloide

Sea la troza de neiloide de longitud l definida por las secciones extremas S_1 y S_2 (figura 3.5):

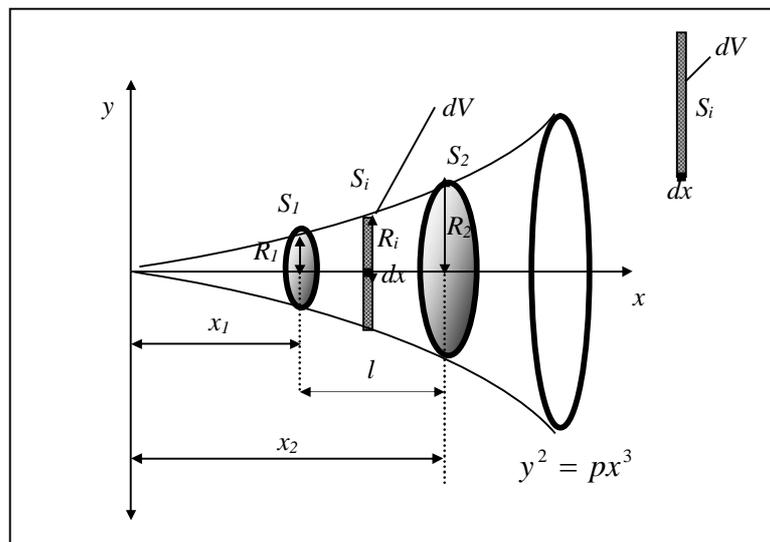


Figura 3.5. Troza neiloide para el cálculo de volúmenes comerciales

- Volumen teórico:

Se aislará un elemento diferencial con volumen $dV = S_i \times dx$

$$V_T = \int_{x_1}^{x_2} S_i dx = \int_{x_1}^{x_2} \pi p x^3 dx = \pi p \int_{x_1}^{x_2} x^3 dx = \pi p \left[\frac{x^4}{4} \right]_{x_1}^{x_2} = \pi p \frac{x_2^4 - x_1^4}{4} = \frac{\pi p}{4} (x_2^2 - x_1^2)(x_2^2 + x_1^2)$$

$$V_T = \frac{\pi p}{4} (x_2^2 + x_1^2)(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = \frac{\pi p l}{4} (x_2^2 + x_1^2)(x_2 + x_1)$$

- Fórmula de Huber:

$$V_H = S_M \times l = \pi p x_M^3 l = \pi p \left(\frac{x_2 + x_1}{2} \right)^3 \times l = \frac{\pi p l}{8} (x_2 + x_1)^3 \Rightarrow V_T \neq V_H \quad (\exists \text{ error})$$

Error cometido por la fórmula de Huber:

$$E_H = \frac{\pi p l}{4} (x_2^2 + x_1^2) (x_2 + x_1) - \frac{\pi p l}{8} (x_2 + x_1)^3$$

$$E_H = \frac{\pi p l}{8} [2(x_2^2 + x_1^2)(x_2 + x_1) - (x_2 + x_1)^3]$$

$$E_H = \frac{\pi p l}{8} [2(x_2^3 + x_2^2 x_1 + x_1^2 x_2 + x_1^3) - x_2^3 - x_1^3 - 3x_2^2 x_1 - 3x_1^2 x_2]$$

$$E_H = \frac{\pi p l}{8} [2x_2^3 + 2x_2^2 x_1 + 2x_1^2 x_2 + 2x_1^3 - x_2^3 - x_1^3 - 3x_2^2 x_1 - 3x_1^2 x_2]$$

$$E_H = \frac{\pi p l}{8} [x_2^3 - x_2^2 x_1 - x_1^2 x_2 + x_1^3] = \frac{\pi p l}{8} (x_2 - x_1)(x_2^2 - x_1^2)$$

$$E_H = \frac{\pi p l^2}{8} (x_2^2 - x_1^2) = \frac{\pi p l^2}{8} (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = \frac{\pi p l^3}{8} (x_2 + x_1)$$

- Fórmula de Smalian:

$$V_S = \left(\frac{S_1 + S_2}{2} \right) \times l = \left(\frac{\pi p x_1^3 + \pi p x_2^3}{2} \right) \times l = \frac{\pi p l}{2} (x_1^3 + x_2^3) \Rightarrow V_T \neq V_S \quad (\exists \text{ error})$$

Error cometido por la fórmula de Smalian:

$$E_S = \frac{\pi p l}{4} (x_2^2 + x_1^2) (x_2 + x_1) - \frac{\pi p l}{2} (x_1^3 + x_2^3)$$

$$E_S = \frac{\pi p l}{4} [(x_2^2 + x_1^2)(x_2 + x_1) - 2(x_1^3 + x_2^3)]$$

$$E_S = \frac{\pi p l}{4} [(x_2^3 + x_2^2 x_1 + x_1^2 x_2 + x_1^3) - 2x_1^3 - 2x_2^3]$$

$$E_S = \frac{\pi p l}{4} [x_2^2 x_1 + x_1^2 x_2 - x_1^3 - x_2^3]$$

$$E_S = -\frac{\pi p l}{4} [-x_2^2 x_1 - x_1^2 x_2 + x_1^3 + x_2^3] = -\frac{\pi p l}{4} [(x_2^2 - x_1^2)(x_2 - x_1)]$$

$$E_S = -\frac{\pi p l^2}{4} [(x_2^2 - x_1^2)] = -\frac{\pi p l^2}{4} (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = -\frac{\pi p l^3}{4} (x_2 + x_1)$$

Un resumen de los volúmenes calculados para las trozas de los 4 tipos aparece en la tabla 3.2:

Tipo	V_T	V_H	V_S
Cilindro	πpl	πpl	πpl
Paraboloide	$S_m \times l$	$S_m \times l$	$S_m \times l$
Cono	$\frac{\pi p}{3}(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2) \times l$	$\frac{\pi p}{4}(x_2^2 + 2x_2 x_1 + x_1^2) \times l$	$\frac{\pi pl}{2}(x_1^2 + x_2^2)$
Neiloide	$\frac{\pi pl}{4}(x_2^2 + x_1^2)(x_2 + x_1)$	$\frac{\pi pl}{8}(x_2 + x_1)^3$	$\frac{\pi pl}{2}(x_1^3 + x_2^3)$

Tabla 3.2. Volúmenes calculados para trozas de los tipos dendrométricos mediante las fórmulas de Huber y Smalian

Los errores absolutos correspondientes se resumen en la tabla 3.3:

Tipo	E_H	E_S	r_H	r_S
Cilindro	0	0	0%	0%
Paraboloide	0	0	0%	0%
Cono	$\frac{\pi pl^3}{12}$	$-\frac{\pi pl^3}{6}$	25%	-50%
Neiloide	$\frac{\pi pl^3}{8}(x_2 + x_1)$	$-\frac{\pi pl^3}{4}(x_2 + x_1)$	50%	-100%

Tabla 3.3. Errores cometidos por las fórmulas comerciales para cubicar trozas de los tipos dendrométricos

Donde:

- V_T : volumen obtenido mediante tipos dendrométricos
- V_H : volumen obtenido por la fórmula comercial de Huber
- V_S : volumen obtenido por la fórmula comercial de Smalian
- E_H : error absoluto cometido por la fórmula de Huber
- E_S : error absoluto cometido por la fórmula de Smalian
- r_H : error relativo cometido por la fórmula de Huber
- r_S : error relativo cometido por la fórmula de Smalian

DEMOSTRACIÓN DE QUE EL VOLUMEN DEL FUSTE PUEDE SER MAYOR QUE EL VOLUMEN TOTAL DEL TRONCO APLICANDO LA FÓRMULA DE HUBER

Se demostrará que según la fórmula de Huber hay volúmenes de troza que pueden ser mayores que el volumen del tronco entero, a partir de una determinada sección. Dado un tronco como el de la figura 3.6, determinaremos la distancia x para la cual el volumen de una troza (fuste por ejemplo) será mayor al volumen total.

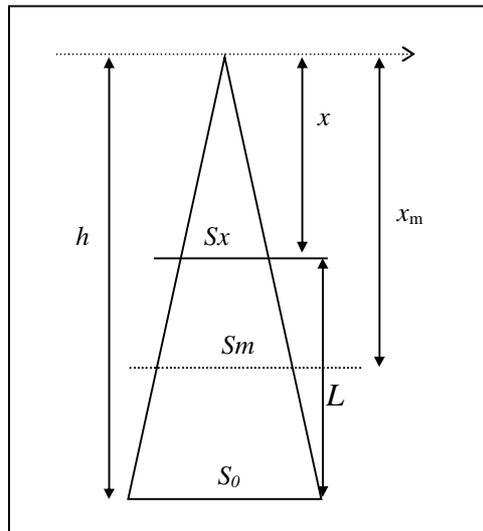


Figura 3.6. Cálculo del volumen total del tronco y de una troza genérica de longitud L

- $V_H = S_m L = \pi p x_m^n L$
 $L = h - x$
 $x_m = \frac{h + x}{2}$
- $V_H = \pi p \left(\frac{h + x}{2} \right)^n \times (h - x)$

Para el cálculo consideraremos como hipótesis que $\frac{dV}{dx} = 0$ (en ese punto - S_x - se produce un incremento en el volumen de la troza calculada):

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} &= \pi p \left(n \left(\frac{h+x}{2} \right)^{n-1} \times \frac{1}{2} (h-x) + (-1) \left(\frac{h+x}{2} \right)^n \right) = \pi p \left(\frac{n}{2} \left(\frac{h+x}{2} \right)^{n-1} \times (h-x) - \left(\frac{h+x}{2} \right)^n \right) = \\ &= \pi p \left(\frac{h+x}{2} \right)^{n-1} \times \left[\frac{n}{2} (h-x) - \frac{h+x}{2} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{dV}{dx} = 0 \quad \frac{n}{2} (h-x) - \frac{h+x}{2} = 0$$

$$\frac{nh}{2} - \frac{nx}{2} - \frac{h}{2} - \frac{x}{2} = 0 ; \frac{h}{2} (n - 1) = \frac{x}{2} (n + 1)$$

Finalmente:

$$x = \frac{h \times (n - 1)}{(n + 1)}$$

Sustituyendo n por su valor podremos calcular la longitud de troza a partir de la cuál el volumen de esa troza será mayor al del tronco entero:

- ✓ Para $n = 0$ y $n = 1$ no se comete error en el cálculo de trozas, por lo que no tiene sentido calcular esta longitud.
- ✓ Para $n = 2$ $x = \frac{1}{3} h$; entonces la longitud crítica sobre el suelo será $L = \frac{2}{3} h$
- ✓ Para $n = 3$ $x = \frac{1}{2} h$; entonces la longitud crítica sobre el suelo será $L = \frac{1}{2} h$

3.2.MÉTODOS DE CUBICACIÓN REAL O EXACTA: POR SECCIONES DE IGUAL LONGITUD, FÓRMULA DE NEWTON Y FÓRMULA DE SIMPSON

Dado que la cubicación comercial nos ofrece errores de cálculo, y las fórmulas teóricas tampoco proporcionan valores absolutamente exactos, pues los troncos no son tipos dendrométricos perfectos, se han buscado otros métodos o fórmulas que nos aproximen al valor exacto del volumen de un pie. No obstante, algunos de estos métodos consisten en descomponer los troncos en dos o más trozas y cubicarlas por las fórmulas de Huber y/o Smalian. Entre estos métodos destacamos:

- I. Método de cubicación por secciones (árboles tipo)
- II. Método de Newton
- III. Método de Simpson

3.2.1. MÉTODO DE CUBICACIÓN POR SECCIONES (MÉTODO DE LOS ÁRBOLES TIPO)

Por tradición sobre todo en Francia, se suelen tomar trozas de 1 m para cubicar de manera exacta pies apeados. Entonces aplicando a cada troza la fórmula de Huber (o de Smalian) se obtendría la cubicación del tronco como suma del volumen de cada troza. Es aconsejable utilizar la fórmula de Huber pues el error cometido será la mitad que si aplicamos la fórmula de Smalian:

1. Cubicación por secciones mediante la fórmula de Huber:

$$V_i = g_i \times l = g_i \times 1 = \frac{\pi}{4} d_i^2 \times l \quad V = \sum_{i=1}^{n-1} g_i + g_n \times l \quad V = \sum_{i=1}^n g_i$$

2. Cubicación por secciones mediante la fórmula de Smalian:

$$V_j = \frac{g_j + g_{j+1}}{2} \times l$$

$$V = \frac{1}{2} \sum (g_i + g_{i+1}) = \frac{1}{2} g_1 + \sum_{i=2}^n g_i + \frac{1}{2} g_{n+1}$$

$$V = \frac{1}{2} g_1 + \sum_{i=2}^n g_i + \frac{1}{2} g_{n+1}$$

En España también se utiliza este método, denominado de cubicación de árboles tipo, con el objetivo de describir el estado forestal en los inventarios para ordenación. El método consiste en elegir una muestra de árboles representativos de cada clase diamétrica, y cubicarlos dividiéndolos en trozas de 1m de longitud hasta los 10 primeros metros, luego de 2 m. La cubicación se realiza mediante aplicación reiterada de la fórmula de Huber a cada troza, obteniéndose el volumen del pie por sumatorio de las trozas. A cada clase diamétrica se la asigna como

volumen unitario la media de los volúmenes de los árboles tipo seleccionados en la muestra de cada clase diamétrica.

A efectos prácticos, se debe tener toda la información métrica correspondiente al apeo y troceado del árbol tipo, con el fin de obtener las existencias volumétricas en el inventario realizado. Así por ejemplo, supongamos tenemos el árbol tipo representado en la figura 3.6. En el árbol apeado, las 5 primeras trozas del tronco se han realizado de longitud 1 m, mientras que el resto, hasta el rabeión (definido con un diámetro en punta delgada de 20 cm) son de 2 m. En cada troza además de su longitud, se ha medido el diámetro en el medio con corteza, así como una muestra del espesor de corteza (e_c , mm).

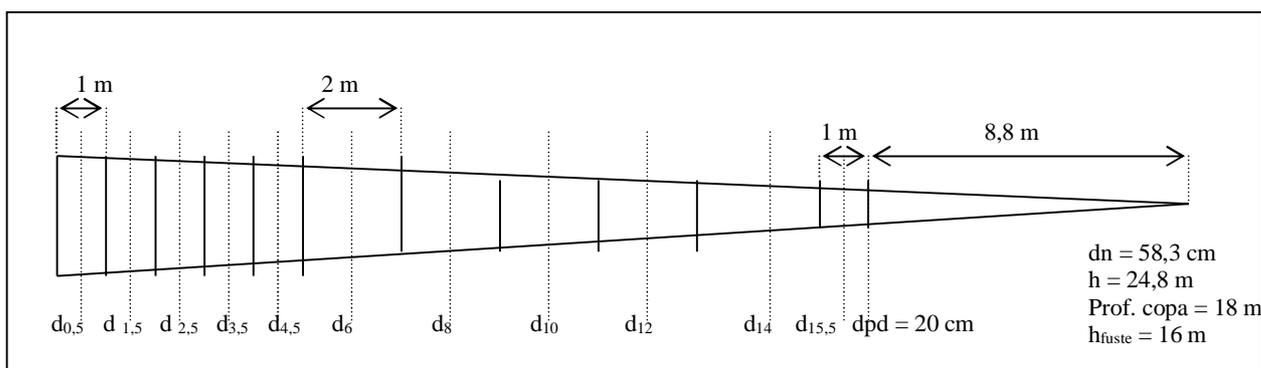


Figura 3.6. Características métricas de un árbol tipo apeado

Los valores de los parámetros dendrométricos medidos en el árbol, así como los volúmenes totales (con corteza y sin corteza) resultado de aplicar la fórmula de Huber a cada una de las trozas resultantes, se deben mostrar en tablas resumen del árbol tipo apeado. El volumen total, tanto con corteza como sin corteza, es el sumatorio de los volúmenes unitarios de las trozas. El rabeión es calculado de manera más exacta aplicando la fórmula del cono (tabla 3.4):

Troza nº	d_{mitad}	d (cm)	L (m)	e_c (mm)	$V_{ccHuber}$ (m^3)	$V_{scHuber}$ (m^3)	
1	$d_{0,5}$	61,3	1	12	0,295	0,272	
2	$d_{1,5}$	57,6	1	10	0,261	0,243	
3	$d_{2,5}$	53,9	1	8	0,228	0,215	
4	$d_{3,5}$	50,3	1	8	0,199	0,186	
5	$d_{4,5}$	46,8	1	8	0,172	0,160	
6	d_6	42,8	2	8	0,288	0,267	
7	d_8	38,3	2	8	0,230	0,212	
8	d_{10}	33,7	2	7	0,178	0,164	
9	d_{12}	29,1	2	7	0,133	0,121	
10	d_{14}	24,6	2	6	0,095	0,086	
11	$d_{15,5}$	21,2	1	6	0,035	0,031	
rabeión*	d_{pd}	20	8,8	5	0,090	0,083	
					V_{fuste} (m^3)	2,115	1,957
					V_{total} (m^3)	2,205	2,040

Tabla 3.4. Parámetros dendrométricos del árbol tipo apeado, y volúmenes total y del fuste (cc y sc)
*Calculado mediante la fórmula del cono

3.2.2. CUBICACIÓN MEDIANTE LA FÓRMULA DE NEWTON* (HUFFEL, 1919):

Según Newton el volumen de un cuerpo puede calcularse a través de la fórmula:

$$V = \frac{l}{6} (S_0 + 4S_m + S_1)$$

Donde:

S_1, S_2 : secciones extremas del sólido

S_m : sección media del sólido

l : longitud del sólido

HUFFEL (1919) fue el primero que recomendó esta fórmula para la cubicación exacta de pies. La fórmula de Newton es aplicable con exactitud para aquellos sólidos de revolución en que las secciones normales al eje de rotación sean funciones polinómicas de hasta tercer grado:

$$S = a + bx + cx^2 + dx^3, \text{ siendo } x \text{ la distancia de la sección al vértice del sólido}$$

Se demuestra que esta fórmula es exacta para cubicar trozas o troncos enteros de los 4 tipos dendrométricos que conocemos, ya que para éstos cualquier sección es función polinómica de hasta de tercer grado. Para los pies que no se ajusten a ningún tipo dendrométrico la fórmula no será precisa, pero sí más exacta que las fórmulas comerciales.

Un tipo dendrométrico puede considerarse como un sólido cuyas secciones perpendiculares al eje de referencia OX son funciones polinómicas del tipo $S = \pi r x^n$. Particularicemos para todos los tipos dendrométricos que hemos estudiado:

1. *Cilindro*: $S = \pi r x^0 = \pi r \Rightarrow$ función polinómica de grado 0
2. *Paraboloide*: $S = \pi r x^1 = \pi r x \Rightarrow$ función polinómica de grado 1
3. *Cono*: $S = \pi r x^2 \Rightarrow$ función polinómica de grado 2
4. *Neiloide*: $S = \pi r x^3 \Rightarrow$ función polinómica de grado 3

* **SIR ISAAC NEWTON**, científico inglés, nacido en Woolsthorpe, Lincolnshire, autor de la teoría de la gravitación universal; sus investigaciones y la metodología científica empleada, constituyen la verdadera culminación de la llamada revolución científica. En febrero de 1672 comunica su teoría sobre la composición de la luz y de los colores y en 1675 envía a la Royal Society su Hipótesis sobre la luz. En 1682, el paso del cometa «Halley» le incita a reemprender sus estudios de mecánica celeste y la visita del propio Halley, en 1684, le sirve de ocasión a Newton para revelar su descubrimiento de la teoría de la gravitación universal. Newton descubrió los principios de su cálculo diferencial e integral hacia 1665-1666, y durante el decenio siguiente elaboró al menos tres enfoques diferentes de su nuevo análisis. Este mismo año inicia la polémica con Leibniz, con motivo de un libro de éste sobre el cálculo, acerca de quién debía ser considerado primer descubridor del cálculo infinitesimal.

En 1687 aparece su obra más importante, *Principios matemáticos de la filosofía natural*, los *Principia*, obra que consta de tres libros: los dos primeros establecen las bases teóricas de la mecánica clásica -expuesta según un método matemático-geométrico que, luego, aplica en el libro tercero a los movimientos celestes, determinando de esta manera, y precisándola cuantitativamente, la existencia de la gravitación universal: fuerza por la que dos cuerpos cualesquiera en el universo se atraen según el producto de sus masas y el inverso del cuadrado de su distancia. Presupuesto y teorema fundamental de la teoría es la consideración de todos los cuerpos a modo de masas puntuales concentradas en su centro. Dos veces, 1689 y 1701, es elegido miembro del Parlamento como representante de la universidad de Cambridge; en 1696 es nombrado inspector de la Casa de la Moneda y luego en 1699 director de la misma; en 1703 es elegido presidente de la Royal Society, sucediendo a Robert Hooke (1635-1703) en este cargo, que desempeña hasta su muerte.

Cualquier sección de cualquier tipo dendrométrico estudiado será una función polinómica de hasta de tercer grado, por tanto podrá cubicarse de manera exacta los 4 tipos dendrométricos y cualquiera de sus trozas.

Para demostrar la exactitud de la fórmula de Newton en la cubicación de troncos enteros, aplicaremos su expresión general a las secciones de referencia (sección extrema S_1 , sección base S_0 y sección mitad S_m) y compararemos el valor obtenido con el real teórico calculado mediante la teoría de los tipos dendrométricos:

1. Cilindro:

- ✓ Volumen teórico: $V_T = S_0 \times h$
- ✓ Volumen mediante la fórmula de Newton:

$$S_0$$

$$V = \frac{h}{6}(S_0 + 4S_M + S_1) \Rightarrow S_M = \frac{S_0}{2^n} = S_0$$

$$S_1 = S_M = S_0$$

$$V = \frac{h}{6}(S_0 + 4S_0 + S_0) = \frac{h}{6}(6S_0) = S_0 \times h \quad q.c.d.$$

2. Paraboloide:

- ✓ Volumen teórico: $V_T = \frac{S_0 h}{2}$
- ✓ Volumen mediante la fórmula de Newton:

$$S_0$$

$$V = \frac{h}{6}(S_0 + 4S_M + S_1) \Rightarrow S_M = \frac{S_0}{2^n} = \frac{S_0}{2}$$

$$S_1 = 0$$

$$V = \frac{h}{6}\left(S_0 + 4\frac{S_0}{2} + 0\right) = \frac{h}{6}(3S_0) = \frac{3S_0 h}{6} = \frac{S_0 h}{2} \quad q.c.d.$$

3. Cono:

- ✓ Volumen teórico: $V_T = \frac{S_0 h}{3}$
- ✓ Volumen mediante la fórmula de Newton:

$$S_0$$

$$V = \frac{h}{6}(S_0 + 4S_M + S_1) \Rightarrow S_M = \frac{S_0}{2^n} = \frac{S_0}{4}$$

$$S_1 = 0$$

$$V = \frac{h}{6} \left(S_0 + 4 \frac{S_0}{4} + 0 \right) = \frac{h}{6} (2S_0) = \frac{2S_0 h}{6} = \frac{S_0 h}{3} \quad q.c.d.$$

4. Neiloide:

✓ Volumen teórico: $V_T = \frac{S_0 h}{4}$

✓ Volumen mediante la fórmula de Newton:

$$S_0$$

$$V = \frac{h}{6} (S_0 + 4S_M + S_1) \Rightarrow S_M = \frac{S_0}{2^n} = \frac{S_0}{8}$$

$$S_1 = 0$$

$$V = \frac{h}{6} \left(S_0 + 4 \frac{S_0}{8} + 0 \right) = \frac{h}{6} \left(\frac{3S_0}{2} \right) = \frac{3S_0 h}{12} = \frac{S_0 h}{4} \quad q.c.d.$$

Demostremos también la exactitud de la fórmula de Newton aplicada a cualquier troza de los tipos dendrométricos, calculando primero su volumen teórico, y comprobando después que dicho volumen coincide con el aportado por la fórmula de Newton. Para calcular los volúmenes de las trozas se ha hecho coincidir el eje de referencia Y con la sección mitad de cálculo de la troza (las secciones de referencia quedarán situadas ahora a $\frac{l}{2}$ y $-\frac{l}{2}$ del origen de coordenadas, siendo l la longitud de la troza) con el fin de simplificar los cálculos al aplicar la fórmula de Newton.

1. Troza cilíndrica:

Sea la troza cilíndrica de longitud l definida por las secciones extremas S_1 y S_2 , y cuya sección en la mitad es S_m (figura 3.7):

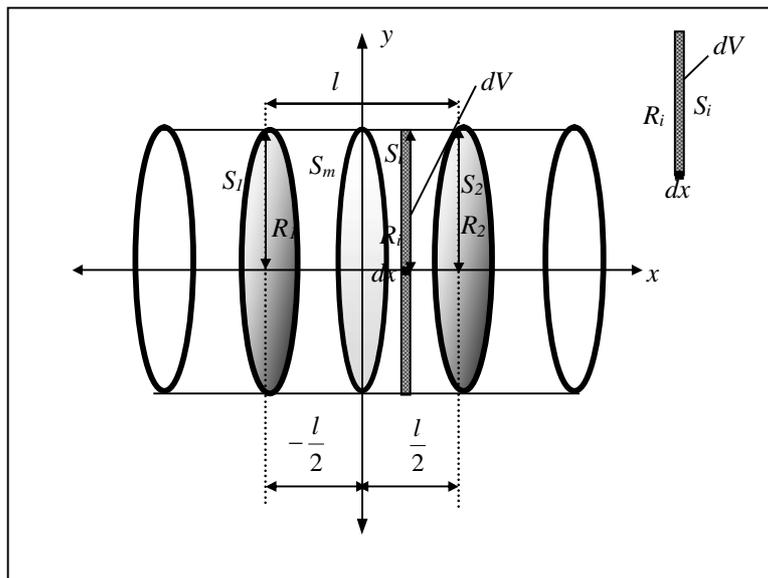


Figura 3.7. Troza cilíndrica para el cálculo del volumen según la fórmula de Newton

✓ Volumen teórico:

Dado que todos los elementos diferenciales del cilindro poseen secciones cuya expresión es $S = a$, el volumen de la troza cilíndrica se calculará mediante integración de esta función en el intervalo de $\frac{l}{2}$ y $-\frac{l}{2}$:

$$V = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} S dx = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} a dx = a[x]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = a \left[\left(\frac{l}{2} \right) - \left(-\frac{l}{2} \right) \right] = a \frac{2l}{l} = a \times l$$

✓ Volumen mediante la fórmula de Newton:

Aplicaremos la fórmula general de Newton particularizándola para el tipo cilíndrico:

$$\begin{aligned} S_0 &= a \\ V &= \frac{l}{6} [S_0 + 4S_M + S_1] \Rightarrow S_M = a \\ S_1 &= a \\ V &= \frac{l}{6} [a + 4a + a] = \frac{l}{6} \times 6a = a \times l \end{aligned}$$

Luego queda demostrado que el volumen mediante la fórmula de Newton es absolutamente exacto al aplicarla en trozas cilíndricas.

2. Troza paraboloides:

Sea la troza parabólica de longitud l que está definida por las secciones extremas S_1 y S_2 , y cuya sección media (situada sobre el eje de referencia Y) es S_m (figura 3.8):

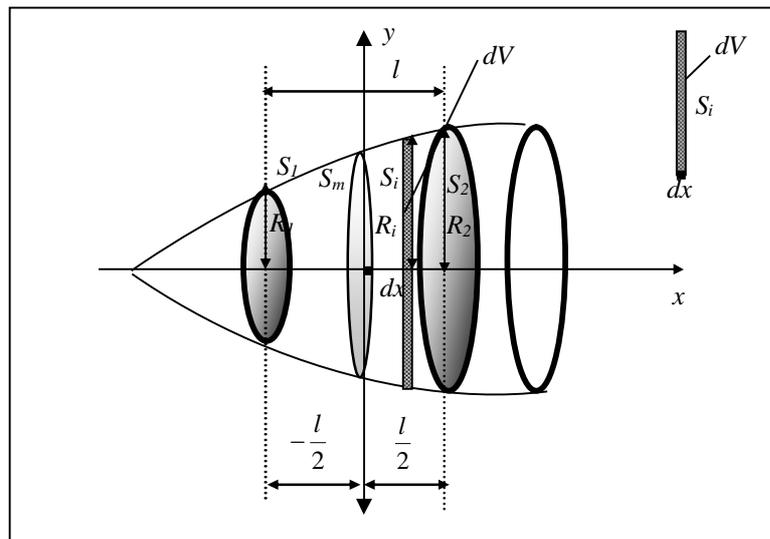


Figura 3.8. Troza paraboloidal para el cálculo del volumen según la fórmula de Newton

✓ Volumen teórico

Cualquier volumen diferencial se calculará por producto de la sección de cálculo y el correspondiente dx sobre el eje X. Los elementos diferenciales del paraboloides poseen secciones $S = a + bx$. Será esta la expresión que permita obtener el volumen buscado mediante su integración en el intervalo de $\frac{l}{2}$ y $-\frac{l}{2}$:

$$V = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} S dx = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} (a + bx) dx = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} a dx + \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} bx dx = \left[ax + b \frac{x^2}{2} \right]_{-l/2}^{l/2}$$

$$V = \left[a \left(\frac{l}{2} \right) + b \left(\frac{\left(\frac{l}{2} \right)^2}{2} \right) \right] - \left[a \left(-\frac{l}{2} \right) + b \left(\frac{\left(-\frac{l}{2} \right)^2}{2} \right) \right]$$

$$V = \frac{al}{2} + \frac{bl^2}{8} + \frac{al}{2} - \frac{bl^2}{8} = \frac{2al}{2} = a \times l$$

✓ Volumen mediante la fórmula de Newton:

Aplicaremos la fórmula general particularizándola para las secciones que definen la troza del tipo paraboloides:

$$S_0 = a + bx_0 = a + b \left(\frac{l}{2} \right)$$

$$V = \frac{l}{6} [S_0 + 4S_M + S_1] \Rightarrow S_M = a + bx_M = a + b \times 0 = a$$

$$S_1 = a + b \left(-\frac{l}{2} \right) = a - b \left(\frac{l}{2} \right)$$

$$V = \frac{l}{6} \times \left[a + b \left(\frac{l}{2} \right) + 4a + a - b \left(\frac{l}{2} \right) \right] = a \times \frac{6l}{6} = a \times l$$

Esto es, queda demostrado que el volumen hallado mediante la fórmula de Newton es absolutamente exacto al aplicarla esta fórmula a trozas parabólicas.

3. Troza cónica:

Sea la troza de cono con longitud l y definida por las secciones extremas S_1 y S_2 , con sección media sobre el eje de referencia Y (S_m) (figura 3.9):

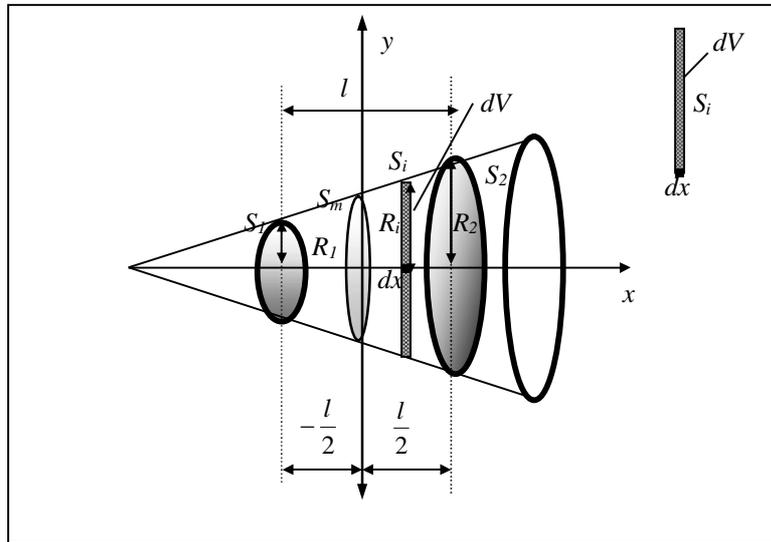


Figura 3.9. Troza cónica para el cálculo del volumen según la fórmula de Newton

✓ Volumen teórico:

El volumen de un elemento diferencial de la troza cónica se calculará por producto de la sección de cálculo y su correspondiente dx . Los elementos diferenciales del cono poseen secciones con expresión $S = a + bx + cx^2$. Si integramos esta función entre los límites $\frac{l}{2}$ y $-\frac{l}{2}$ obtendremos el volumen teórico de la troza representada:

$$V = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} S dx = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} (a + bx + cx^2) dx = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} a dx + \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} bx dx + \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} cx^2 dx$$

$$V = \left[ax + b \frac{x^2}{2} + c \frac{x^3}{3} \right]_{-l/2}^{l/2}$$

$$V = \left[a \left(\frac{l}{2} \right) + b \left(\frac{\left(\frac{l}{2} \right)^2}{2} \right) + c \left(\frac{\left(\frac{l}{2} \right)^3}{3} \right) \right] - \left[a \left(-\frac{l}{2} \right) + b \left(\frac{\left(-\frac{l}{2} \right)^2}{2} \right) + c \left(\frac{\left(-\frac{l}{2} \right)^3}{3} \right) \right]$$

$$V = \frac{al}{2} + \frac{bl^2}{8} + \frac{cl^3}{24} + \frac{al}{2} - \frac{bl^2}{8} + \frac{cl^3}{24} = \frac{2al}{2} + \frac{2cl^3}{24} = al + \frac{cl^3}{12}$$

$$V = \frac{l}{6} \times \left[6a + \frac{cl^2}{2} \right]$$

✓ Volumen mediante la fórmula de Newton:

Será aplicada la fórmula general de Newton particularizada para las secciones que definen la troza cónica de estudio:

$$V = \frac{l}{6} [S_0 + 4S_M + S_1] \Rightarrow S_0 = a + bx_0 + cx_0^2 = a + b\left(\frac{l}{2}\right) + c\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$S_M = a + bx_M + cx_M^2 = a + b \times 0 + c \times 0 = a$$

$$S_1 = a + b\left(-\frac{l}{2}\right) + c\left(-\frac{l}{2}\right)^2 = a - b\left(\frac{l}{2}\right) + c\left(-\frac{l}{2}\right)^2$$

$$V = \frac{l}{6} \times \left[a + b\left(\frac{l}{2}\right) + c\left(\frac{l}{2}\right)^2 + 4a + a - b\left(\frac{l}{2}\right) + c\left(-\frac{l}{2}\right)^2 \right]$$

$$V = \frac{l}{6} \times \left[a + \frac{bl}{2} + \frac{cl^2}{4} + 4a + a - \frac{bl}{2} + \frac{cl^2}{4} \right]$$

$$V = \frac{l}{6} \times \left[6a + \frac{2cl^2}{4} \right]$$

$$V = \frac{l}{6} \times \left[6a + \frac{cl^2}{2} \right]$$

Queda entonces demostrado que el volumen hallado mediante la fórmula de Newton es absolutamente exacto al aplicarla a trozas cónicas.

4. Troza neiloide:

En la figura 3.10 aparece representada una troza de neiloide de longitud l definida por las secciones extremas S_1 y S_2 , de sección media sobre el eje de referencia $Y(S_m)$:

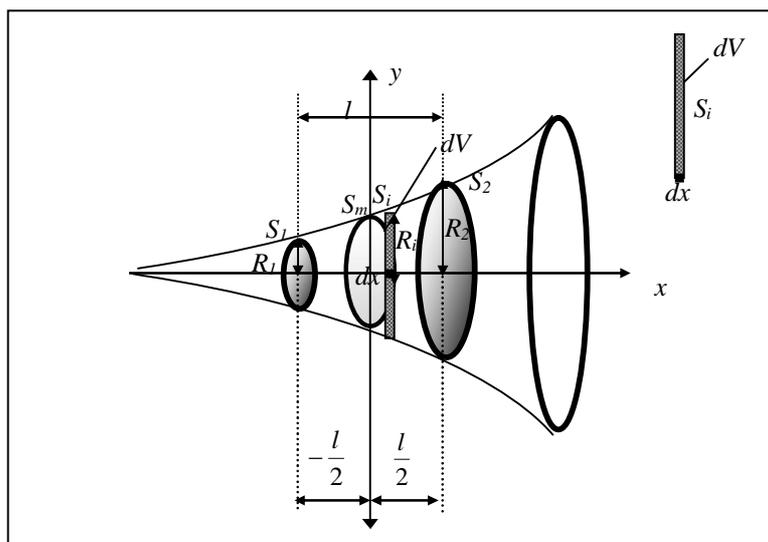


Figura 3.10. Troza neiloide para el cálculo del volumen según la fórmula de Newton

✓ Volumen teórico:

Un volumen diferencial de la troza neiloide se calculará mediante producto de la sección de cálculo y su correspondiente dx . Los elementos diferenciales del cono poseen secciones con expresión $S = a + bx + cx^2 + dx^3$. Si integramos esta función entre los límites $\frac{l}{2}$ y $-\frac{l}{2}$ obtendremos el volumen teórico de la troza representada:

$$V = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} S dx = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} (a + bx + cx^2 + dx^3) dx = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} a dx + \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} bx dx + \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} cx^2 dx + \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dx^3 dx$$

$$V = \left[ax + b \frac{x^2}{2} + c \frac{x^3}{3} + d \frac{x^4}{4} \right]_{-l/2}^{l/2}$$

$$V = \left[a \left(\frac{l}{2} \right) + b \left(\frac{\left(\frac{l}{2} \right)^2}{2} \right) + c \left(\frac{\left(\frac{l}{2} \right)^3}{3} \right) + d \left(\frac{\left(\frac{l}{2} \right)^4}{4} \right) \right] - \left[a \left(-\frac{l}{2} \right) + b \left(\frac{\left(-\frac{l}{2} \right)^2}{2} \right) + c \left(\frac{\left(-\frac{l}{2} \right)^3}{3} \right) + d \left(\frac{\left(-\frac{l}{2} \right)^4}{4} \right) \right]$$

$$V = \frac{al}{2} + \frac{bl^2}{8} + \frac{cl^3}{24} + \frac{dl^4}{64} + \frac{al}{2} - \frac{bl^2}{8} + \frac{cl^3}{24} - \frac{dl^4}{64} = \frac{2al}{2} + \frac{2cl^3}{24} = al + \frac{cl^3}{12}$$

$$V = \frac{l}{6} \times \left[6a + \frac{cl^2}{2} \right]$$

✓ Volumen mediante la fórmula de Newton:

$$V = \frac{l}{6} [S_0 + 4S_M + S_1] \Rightarrow S_0 = a + bx_0 + cx_0^2 + dx_0^3 = a + b \left(\frac{l}{2} \right) + c \left(\frac{l}{2} \right)^2 + d \left(\frac{l}{2} \right)^3$$

$$S_M = a + bx_M + cx_M^2 + dx_M^3 = a + b \times 0 + c \times 0 + d \times 0 = a$$

$$S_1 = a + b \left(-\frac{l}{2} \right) + c \left(-\frac{l}{2} \right)^2 + d \left(-\frac{l}{2} \right)^3 = a - b \left(\frac{l}{2} \right) + c \left(-\frac{l}{2} \right)^2 - d \left(\frac{l}{2} \right)^3$$

$$V = \frac{l}{6} \times \left[a + b \left(\frac{l}{2} \right) + c \left(\frac{l}{2} \right)^2 + d \left(\frac{l}{2} \right)^3 + 4a + a - b \left(\frac{l}{2} \right) + c \left(-\frac{l}{2} \right)^2 - d \left(\frac{l}{2} \right)^3 \right]$$

$$V = \frac{l}{6} \times \left[a + \frac{bl}{2} + \frac{cl^2}{4} + \frac{dl^3}{8} + 4a + a - \frac{bl}{2} + \frac{cl^2}{4} - \frac{dl^3}{8} \right]$$

$$V = \frac{l}{6} \times \left[6a + \frac{2cl^2}{4} \right]$$

$$V = \frac{l}{6} \times \left[6a + \frac{cl^2}{2} \right]$$

Queda demostrado que el volumen hallado mediante la fórmula de Newton es absolutamente exacto al aplicarlo a trozas neiloides.

3.2.3. CUBICACIÓN MEDIANTE LA FÓRMULA DE SIMPSON

Consiste en cubicar un tronco o fuste dividiéndolo en un número par de trozas ($2n$) de longitud L y aplicar posteriormente la fórmula de Newton a cada una de las trozas imaginarias de longitud $2L$ generadas (figura 3.11). Desarrollando el sumatorio de los volúmenes de cada troza se obtiene la denominada **fórmula de Simpson** para la cubicación de troncos enteros.

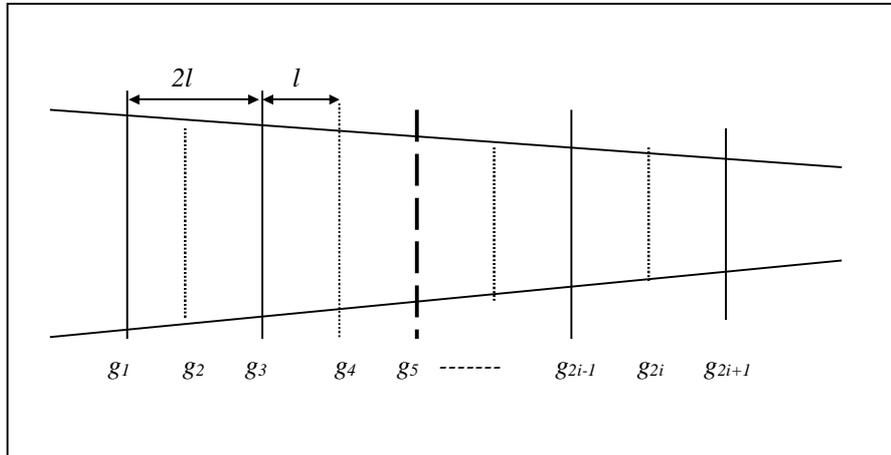


Figura 3.11. Trozas imaginarias para la cubicación según la fórmula de Simpson

La fórmula de Newton aplicada a una troza genérica de longitud $2l$ será:

$$V_i = \frac{2l}{6} (g_{2i-1} + 4g_{2i} + g_{2i+1})$$

Y para el total de trozas:

$$V_1 = \frac{2l}{6} (g_1 + 4g_2 + g_3)$$

$$V_2 = \frac{2l}{6} (g_3 + 4g_4 + g_5)$$

⋮

$$V_n = \frac{2l}{6} (g_{2n-1} + 4g_{2n} + g_{2n+1})$$

El sumatorio del anterior desarrollo nos permite obtener la fórmula de Simpson:

$$V_{SIMPSON} = \frac{l}{3} \left(g_1 + 4 \sum_{i=1}^n g_{2i} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} g_{2i+1} + g_{2n+1} \right)$$

Como se observa esta es una fórmula de cubicación por secciones muy exacta, aunque también muy laboriosa de calcular, por lo que su uso no está muy extendido.

3.2.4. PROCEDIMIENTOS GRÁFICOS

Para cubicar un árbol por secciones hemos visto hasta ahora los procedimientos analíticos con el fin de obtener su volumen. Existen también otros procedimientos denominados gráficos, que consisten en representar en un sistema de coordenadas cartesianas los diámetros y las alturas de cada sección del pie. De esta manera se obtiene una figura cuya superficie será el volumen del tronco, aplicando la definición de integral definida (figura 3.12). La forma de hallar la superficie es mediante papel transparente cuadrículado o mejor mediante el uso de un planímetro (también conocido como método del planímetro de Meyer). En el valor final del volumen calculado deberemos tener en cuenta la escala gráfica utilizada en la representación de los parámetros dasométricos en la construcción de la curva.

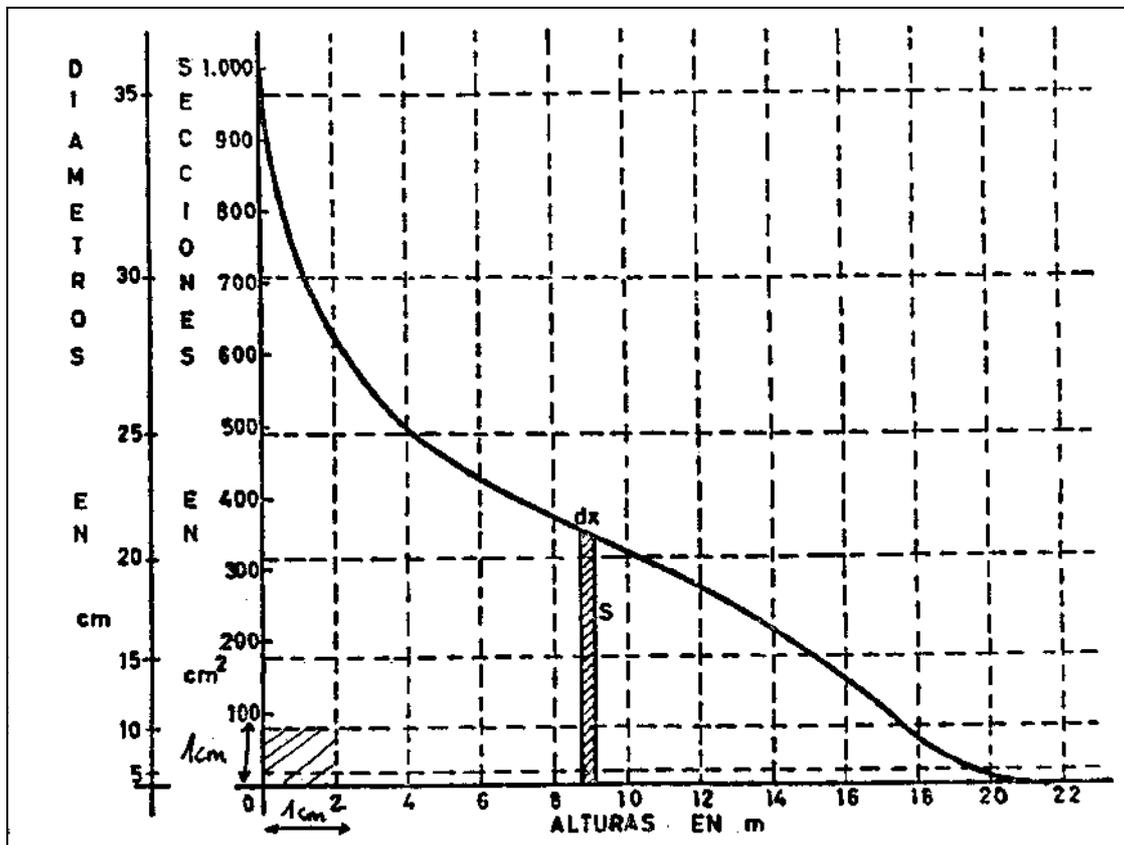


Figura 3.12. Método de cubicación gráfica (tomado de PITA, 1979)

Veamos como ejemplo de cálculo el representado en la figura 3.12. La equivalencia entre la escala y el volumen del árbol será:

$$1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} = 100 \text{ cm}^2 \times 2 \text{ m};$$

$$1 \text{ cm}^2 = 20.000 \text{ cm}^3$$

Si se han planimetrado 3.259 mm² bajo la curva, entonces el volumen será:

$$1 \text{ cm}^2 \rightarrow 20.000 \text{ cm}^3$$

$$3.259 \text{ mm}^2 \rightarrow V \quad V = \frac{20.000 \text{ cm}^3 \times 32,59 \text{ cm}^2}{1 \text{ cm}^2} = 651.800 \text{ cm}^3$$

$$V = 0,652 \text{ m}^3$$

3.3. MÉTODO DE PRESSLER-BITTERLICH (1959)

Según este método el volumen de un árbol es igual a la sección de la base por $\frac{2}{3}$ de la altura del denominado como *punto directriz*. El punto directriz se define como aquel que se encuentra a una altura tal que el diámetro de la sección en esa altura es igual a la mitad del diámetro de la sección de la base (figura 3.13).

Si $d_i = \frac{d_0}{2} \Rightarrow i$ es la sección donde se encuentra el punto directriz. La fórmula de

Pressler-Bitterlich (1959) tiene por tanto por expresión:

$$V = \frac{2}{3} S_o h_i$$

Con: S_o : sección de la base
 h_i : altura directriz
 V : volumen del tronco

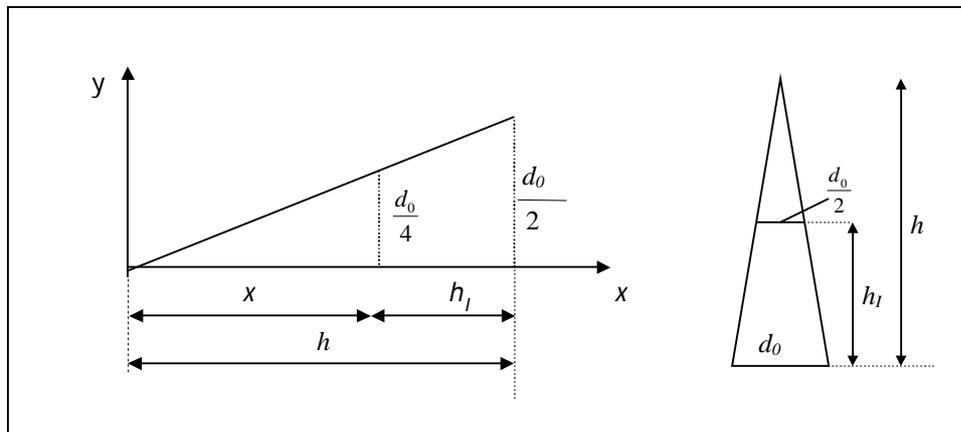


Figura 3.13. Cálculo del volumen de un pie mediante la altura directriz (Método de Pressler-Bitterlich)

Este método de cubicación es exacto si el tronco se ajusta a los tipos dendrométricos paraboloides, cono y neiloide, como se demostrará a continuación. Vamos a realizar el desarrollo que permite llegar a su expresión y demostraremos su exactitud para los tipos comentados.

Para ello, sabemos en primer lugar que el volumen teórico para un tipo dendrométrico es:

$$V = \frac{S_o h}{n+1}$$

teniendo como línea característica de perfil $y^2 = px^n$.

Aplicaremos la ecuación del tipo a las secciones base y del punto directriz del sólido de revolución que genera el tronco del árbol:

$$1. \text{ Sección de la base del árbol } (x = h): \quad \left(\frac{d}{2}\right)^2 = ph^n$$

$$2. \text{ Sección del punto directriz } (x = h - h_l): \quad \left(\frac{d}{4}\right)^2 = p(h - h_l)^n$$

Dividiendo ambas expresiones obtendremos una nueva que relaciona la altura total con la altura directriz:

$$4 = \frac{h^n}{(h - h_l)^n}$$

De la nueva expresión se puede despejar la altura en función de la altura directriz o la propia altura directriz en función de la altura total:

$$(1 - \sqrt[n]{4})h = \sqrt[n]{4}h_l \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{4} = \frac{h}{(h - h_l)} \quad \Rightarrow \quad h = \left(\frac{\sqrt[n]{4}}{\sqrt[n]{4} - 1}\right) \times h_l$$

$$h_l = h \times \left(\frac{\sqrt[n]{4} - 1}{\sqrt[n]{4}}\right)$$

Y el volumen genérico para cualquier tipo dendrométrico en función de la altura directriz:

$$V = \left(\frac{\sqrt[n]{4}}{\sqrt[n]{4} - 1}\right) \frac{S_o h_l}{n + 1}$$

Si particularizamos la expresión para los tipos dendrométricos, se comprobará que la fórmula es exacta para los tipos con valor de $n > 0$:

- Paraboloides ($n = 1$): $V = \frac{S_o h_l}{n + 1} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3} S_o h_l$

- Cono ($n = 2$): $V = \frac{S_o h_l}{n + 1} \times \frac{2}{1} = \frac{2}{3} S_o h_l$

- Neiloide ($n = 3$): $V = \frac{S_o h_l}{n + 1} \left(\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4} - 1}\right) = 0,6756 S_o h_l \cong \frac{2}{3} S_o h_l$

Para el cilindro no es aplicable la expresión de Pressler-Bitterlich, ya que la altura directriz debería calcularse en función de $4^{\frac{1}{0}}$ (no existe este valor), además se cumple que el diámetro a lo largo de un cuerpo cilíndrico es constante, luego el punto directriz no existe realmente.

Aunque es exacta para los tres tipos dendrométricos mostrados, su aplicación no nos ofrecerá el volumen real en los troncos que suelen ajustarse por tramos a todos los tipos. Eso sí, si predominase un tipo es bastante precisa para la cubicación de esos pies.

Desde un punto de vista práctico la exactitud de la fórmula mejora, si en vez de la sección en la base se toma la sección normal, con el fin de evitar las anomalías que pueda tener el pie en la base del tocón (figura 3.14):

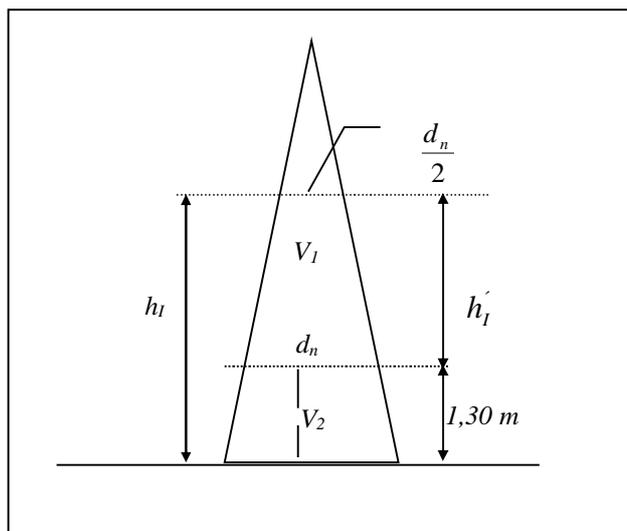


Figura 3.14. Cubicación de un pie mediante la fórmula de Pressler-Bitterlich simplificada

Véase como entonces el tronco puede calcularse como suma del volumen de dos trozas, la primera de sección normal como base y sección superior la cima, con una altura igual a la altura total menos 1,30 m, y una segunda troza que se asemejaría a un cilindro con sección base igual a la sección en la base del árbol del tronco, y de sección superior la sección normal del pie:

$$V_1 = \frac{2}{3} \times \frac{\pi}{4} \times d_{1,30}^2 \times h'_I = \frac{2}{3} \times \frac{\pi}{4} \times d_{1,30}^2 \times (h_I - 1,30)$$

$$V_2 = \frac{\pi}{4} \times d_{1,30}^2 \times 1,30$$

El volumen total será la suma de los dos volúmenes antes calculados:

$$V_T = \frac{2}{3} \times \frac{\pi}{4} \times d_{1,30}^2 \times h'_I = \frac{2}{3} \times \frac{\pi}{4} \times d_{1,30}^2 \times (h_I - 1,30) + \frac{\pi}{4} \times d_{1,30}^2 \times 1,30$$

$$V_T = \frac{\pi}{4} d_n^2 \left[\frac{2}{3} \times (h_I - 1,30) + 1,30 \right]$$

$$V_T = \frac{\pi}{4} d_n^2 \left(\frac{2}{3} h_I + 0,43 \right)$$

Para simplificar esta fórmula podríamos eliminar el término 0,43 a sabiendas de que obtendremos un volumen ligeramente por defecto.

$$V_T = \frac{\pi}{4} d_n^2 \times \frac{2}{3} h_l = \frac{2\pi}{12} \times d_n^2 \times h_l$$

Finalmente obtendremos la fórmula simplificada de Pressler-Bitterlich:

$$V_T = \frac{\pi}{6} \times d_n^2 \times h_l$$

3.4. OTROS MÉTODOS DE CUBICACIÓN

Dentro de este punto repasaremos los siguientes métodos:

1. Cubicación por trozas de longitud desigual
2. Cubicación por coeficientes mórficos
3. Cubicación por fórmulas rápidas o abreviadas
4. Método de cubicación utilizado en el inventario forestal francés

1. Cubicación por trozas de longitud desigual. Consiste en dividir el tronco del árbol en un determinado número de trozas de longitud desigual. El volumen total será la suma de los volúmenes de cada troza. Se aplicarán las fórmulas de Smalian o de Huber.

$$V_S = \frac{h_1 g_1}{2} + \sum_{i=2}^n (h_{i-1} + h_i) \frac{g_i}{2} + \frac{h_n g_{n+1}}{2}$$

$$V_H = \sum_{i=1}^n g_i h_i$$

2. Cubicación por coeficientes mórficos. Supone asemejar el tronco al tipo dendrométrico cilindro, de sección la del diámetro a 1,30 m y altura la total del pie. El volumen así calculado, al ser ficticio, se multiplica por un coeficiente mórfico (f) reductor. Este método ofrece mucho error para árboles individuales y sirve para calcular volúmenes de masas, ya que se compensará el error por exceso cometido en unos árboles con otros por defecto.

$$V_{\text{TRONCO}} < V_{\text{CILINDRO}}$$

$$V = \frac{\pi}{4} d_n^2 h f$$



3. Cubicación por fórmulas abreviadas. Se utilizan para árboles en pie y sirven para medir volúmenes de la masa de forma rápida, en aquellos casos que no interese mucha precisión. Su uso se limita a las condiciones del sitio en donde fueron ajustadas. Señalaremos algunas de las muchas que aparecen recogidas en la bibliografía forestal:

✓ Fórmula de árboles de reserva en monte medio:

- Fórmula de Algan-Monnin (1901), cuando h está entre 4 y 12 m:

$$V = \frac{d_{1,30}^2}{2} (h + 2)$$

- Fórmula de Algan (1901), cuando $h > 12$ m: $V = 0,4 d_{1,30}^2 (h + 5)$

✓ Fórmula para frondosas de monte alto en espesura normal:

- Fórmula de Auvergne: $V = 0,55 d_{1,30}^2 h$

- Fórmula de Algan (1901): $V = 0,4d_{1,30}^2 (h + 5)$
- ✓ Fórmula para frondosas de monte alto, roble y haya en masas claras:
 - Fórmula de Bouvar: $V = 0,5d_{1,30}^2 h_{fuste}$
- ✓ Fórmula de cubicación del chopo canadiense:
 - Fórmula de Benassi: $V = \frac{1}{3}d_{1,30}^2 h_{total}$
- ✓ Fórmulas de cubicación de abetos, píceas y frondosas con copa poco desarrollada (aliso, cerezo, abedul):
 - $V = 0,42d_{1,30}^2 h_{fuste}$
 - $V = 0,33d_{1,30}^2 h_{total}$
- ✓ Fórmulas de cubicación de coníferas:
 - Para *Pinus nigra*: Fórmula de Patrone (1963) $V = 0,36d_{1,30}^2 h_{total}$
 - Para *Pinus pinea* y *Pinus pinaster*:
Fórmula de Di Tello $V = 0,5d_{1,30}^2 h_{fuste}$
- ✓ Fórmula de Denzin (1929): $V = \frac{d^2 (cm)}{1000}$

En esta fórmula se supone constante la altura mórfica; $h = 12,74$

Demostración:

$V = \frac{d^2 (cm)}{1000} \Rightarrow V = \frac{\pi}{4} d^2 (m^2) \times h (m) \times f$; para poder comparar ambas fórmulas deben estar en las mismas unidades, puesto que la fórmula de Denzin viene expresada en cm^2 :

$$\frac{10^4 d^2}{1000} = \frac{\pi}{4} d^2 hf \rightarrow 10 = \frac{\pi}{4} hf ; \quad hf = \frac{40}{\pi} = 12,73 \text{ m}$$

En casi todas las especies esta altura mórfica corresponde a una altura total de 25-28 m. Si nuestro pie tiene de altura más o menos metros de 25-28, al volumen de Denzin se añadirá o restará un 3% por cada metro de discrepancia.

4. Método de cubicación del I.F.N. Francés (1985): consiste en cubicar un tronco dividiéndolo en trozas de la siguiente manera:
 - La 1ª troza tiene longitud desde la base hasta una altura de 2,60 m. El volumen se obtiene aplicando la fórmula de Huber: $V = \frac{\pi}{4} d_n^2 \times 2,60$

- Una segunda troza se mide desde 2,60 m hasta la primera deformación observada del tronco (rama gruesa, cambio brusco de sección, abultamiento, etc). Esta troza se cubica por la fórmula de Newton:

$$V = \left(\frac{h_d - 2,60}{6} \right) \frac{\pi}{4} (d_{2,60}^2 + 4d_m^2 + d_{d1}^2)$$

- El resto de trozas vienen delimitadas por las posibles deformaciones del tronco y se cubicarán por la fórmula de Huber

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALGAN, H. (1901). *Tarifs de cubages*. Bulletin de la Societé forestiere de Franche-Comté et des provinces de l'Est, nº 2. pp. 123-130.

ALGAN, H. (1901). *Tarifs unifiés*. Revue des Eaux et Forêts. Pp 552-562.

BITTERLICH, W. (1959). *Pressler Richthöhe in neuem Licht*. Allgemeine Forstzeitung nº 5/6, pp. 47-49.

CHAUDÉ, P (1988). *Bareme de cubage des bois en grumes d'après les diametres medians*. La Varenne-Hilaire: Jean Chaudé. 170 pp.

CHAUDÉ, P. y DECESSE, E. (1983). *Bareme de cubage des bois en grumes d'après leur circonférence médiane; grumes d'oeuvre, bois d'industrie, bois de mine*. La Varenne-Hilaire: Jean Chaudé. 285 pp.

DENZIN (1929). *Schätzung der Masse stehender Waldbäume*. Forstarchiv, S. 382-384.

HUFFEL, G. (1919). *Économie forestière, tome II*. 2ª edición. La Maison Rustique. Paris. 502 pp.

HUBER, F.X. (1828). *Hilfstabellen für Bedienstete des Forst-u. Baufachs zur leichten und schnellen Berechnung des Massengehaltes roher Holzstämme usw*. München.

I.F.N. (1985). *Inventaire Forestier National. Buts et méthodes de l'Inventaire Forestier National*. Paris: Direction de Forêts.

PATRONE, G. (1963): *Lezioni di dendrometría*. Florenz 392 S.

PITA, P.A. (1979). *Dasometría* (Tomos 1, 2 y 3). E.U.I.T. Forestal. Madrid.

SMALIAN, H.L. (1837). *Beitrag zur Holzmeßkunst*. Stralsund.

SCHAEFFER, L. (1950). *Gammes de barèmes a double entrée pour le cubage du trône des arbres sur pied*. REF.

CAPÍTULO 4

ESTUDIO DE LA FORMA DEL ÁRBOL

- 4.1. INTRODUCCIÓN**
- 4.2. CARACTERIZACIÓN DE LA FORMA DEL TRONCO: COCIENTES DE FORMA, COEFICIENTES MÓRFICOS, PUNTO DE FORMA Y TABLAS, CURVAS O FÓRMULAS DE DECRECIMIENTO**
- 4.3. FORMA DE LA COPA: IMPORTANCIA, CARACTERÍSTICAS MÉTRICAS Y ARQUITECTURA DE LA COPA**
- 4.4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

4.1. INTRODUCCIÓN

Cuando se habla del estudio de la forma del árbol, se entiende que hacemos referencia tanto a la forma del tronco como a la forma de la copa. Ya se comentó cuando se hablaba de los tipos dendrométricos, de la interrelación existente entre la copa del árbol y su tronco. Podríamos afirmar que la forma de la copa es la que determina la forma del tronco, pero entonces tendremos también que responder a la pregunta: ¿de qué depende la forma de la copa, y por tanto, la del tronco?

De forma general, podemos indicar que la forma de la copa de un árbol va a depender de:

1. Características de la especie (genética)
2. Factores ecológicos
3. Factores antrópicos
4. Arquitectura de la copa

1. Carga genética

La carga genética de cada especie lleva implícito las características de sus tejidos, temperamento, predilección por ciertos tipos de suelos, por condiciones climáticas concretas, etc.

Así, las coníferas tienden a formar copas en torno a un eje único (que es el tronco), con pocas bifurcaciones, mientras que algunas frondosas tienden a formar copas con una gran ramificación en el extremo del tronco individual.

Independientemente de esto, el temperamento robusto (especies de luz) origina que se formen masas claras, con copas amplias y profundas, dando lugar a troncos de cono y neiloides. Las especies de sombra dan lugar a masas densas, de copas estrechas y poco profundas, con troncos de los tipos cilindro y paraboloide.

Parece que la existencia de ramificación en el tronco le hace a este "no ensanchar", puesto que la biomasa generada, en vez de acumularse en el tronco, se distribuirá en las ramificaciones, es decir en las ramas y en el follaje. También se explica este hecho, porque el tronco adquiere la sección necesaria en su base para aguantar el esfuerzo provocado principalmente por el viento. Todas estas cuestiones serán analizadas en los puntos posteriores de este tema.

2. Factores ecológicos

Las características ecológicas de un determinado sitio que más influyen en la forma del árbol, son la fuerza del viento y la calidad de estación. La calidad de estación permite que los árboles se desarrollen en un lugar en función de las temperaturas, de la humedad, del tipo de suelo. Buenas calidades de estación permiten mayor densidad en el arbolado y mayores alturas. Además, se tendrá un menor desarrollo en las copas, dando lugar a troncos del tipo cilindro y paraboloides (Figura 4.1).

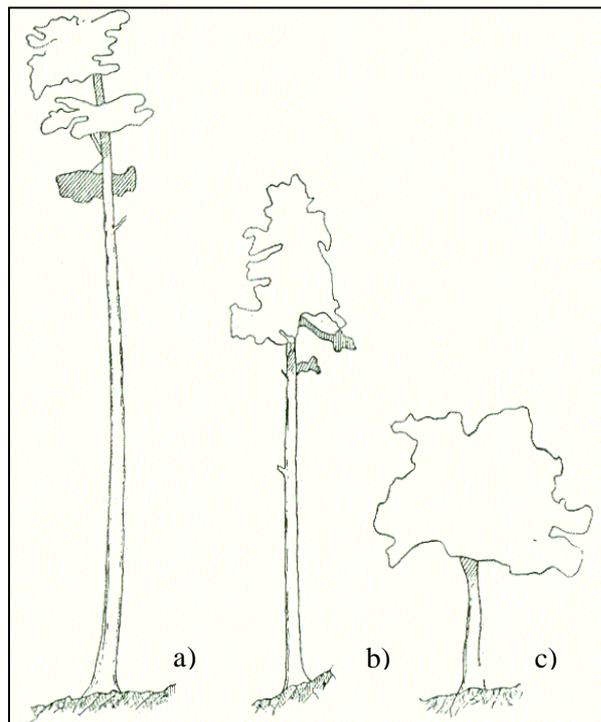


Figura 4.1. Mejor calidad de estación se traduce en fustes más altos y copas menos desarrolladas (ilustración tomada de Mackay, 1964):
a) Conífera en zona de calidad alta b) Conífera en zona de calidad media
c) Conífera en zona de calidad baja

En zonas con fuertes vientos existirán troncos asimétricos, con fuerte decrecimiento longitudinal y copas poco densas, con pocas ramas laterales, en las que será posible comprobar frecuentemente el denominado "efecto bandera" (por ejemplo en los sabinares de El Hierro o en los pies de las divisorias).

3. Factores antrópicos

Un factor extrínseco que afecta a la forma de la copa es el tratamiento selvícola aplicado a la masa, pues en función de su intensidad variará la densidad del arbolado (claras), el ramaje (podas), etc, y ello afectará sin duda a la conformación del tronco. Así, las podas eliminan parte de la copa (ramas más bajas), consiguiéndose un tronco regular y con menor número de nudos, más servible para el aprovechamiento maderero.

Esto es precisamente uno de los objetivos de la silvicultura, conseguir arbolado bien conformados, esto es, pies más sanos y vigorosos, a la vez que más aprovechables. Por otra parte, cuando se realizan las claras, al estar creciendo el árbol en menor densidad, se consigue que aumente el crecimiento en diámetro en detrimento del crecimiento en altura.

4. Arquitectura de la copa

La arquitectura de la copa hace referencia a la disposición de los siguientes parámetros que conforman las copas: número de ramas, tipos de ramas, inclinación media de ramas respecto al tronco, ramificaciones secundarias, cantidad de follaje, inclinación y distribución de los ramillos, etc. Para desarrollar este punto, haremos referencia al artículo *The relationship of evergreenness, crown, architecture, and leaf size* (SPRUGEL, 1986), en el que se intentan explicar varios modelos de masas (tipos de bosques) en función de la arquitectura de la copa y del tamaño de sus hojas. Los tipos de bosques mencionados son los siguientes:

- 1) Bosques del hemisferio norte: los bosques boreales y de alta montaña presentan árboles de hoja perenne
- 2) Bosques de clima fresco-templado: predominan las especies de hoja caduca
- 3) Bosques de zonas frías: prácticamente todos los árboles de hoja perenne tienen hojas en forma de acícula, y los de hoja caduca tienen hojas anchas (no hay árboles de hoja ancha perennifolios ni caducos en forma de acícula)

Se sugiere por tanto, que la combinación de hojas perennes con forma de acícula (gimnospermas), u hojas caducifolias pero anchas, proporcionan ventajas en estas condiciones climáticas que otras posibles combinaciones no darían. Pero no hay razón por la cual las gimnospermas deban tener hojas en forma de acículas, y de hecho muchas no las tienen (géneros *Agathis*, *Podocarpus*..).

Sprugel (1986) ha aportado una explicación a esta circunstancia, estudiando la relación existente entre la orientación de las hojas, la estructura de la cubierta, el temperamento del árbol durante la época vegetativa y la fotosíntesis.

Una cubierta con hojas pequeñas, dispuestas no perpendicularmente a los rayos del sol, podrá usar más eficientemente la luz que una cubierta con hojas anchas y perpendiculares a la luz. Las hojas requieren para alcanzar el máximo de tasa fotosintética sólo el 25% de luz incidente, por lo que un ángulo de 15° con respecto a los rayos del sol es más que suficiente. Si la hoja está perpendicular al sol, no se produce más tasa de fotosíntesis y además deja pasar menos luz a los

niveles inferiores de la cubierta. Es mejor una cubierta de hojas pequeñas, pues así podrá tener esta cubierta más profundidad neta para realizar la fotosíntesis.

A bajas temperaturas, la tasa de fotosíntesis decrece más rápidamente en las hojas saturadas de luz que en las no saturadas, por eso a bajas temperaturas se produce un menor descenso en la tasa de fotosíntesis en árboles con acículas pequeñas y que forman un ángulo importante con respecto a la luz del sol, que en árboles de hoja ancha y con hojas dispuestas perpendiculares al sol.

Las acículas y no así las hojas anchas, se podrán colocar a distintos ángulos con respecto al sol, manteniéndose constante la eficiencia de la fotosíntesis con independencia del ángulo de iluminación. Se creará así una disposición foliar tal que, la radiación incidente llegará a las hojas que están situadas en la parte superior del estrato con un cierto ángulo, no quedando absorbida toda la radiación en ese nivel. Además, en los últimos niveles de la cubierta, la luz no interceptada en el estrato superior será absorbida por las hojas inferiores, puesto que sí que se disponen en esos niveles perpendiculares a los rayos del sol.

4.2. CARACTERIZACIÓN DE LA FORMA DEL TRONCO

4.2.1. INTRODUCCIÓN

Ya se ha hablado, desde un punto de vista teórico, de las cuatro formas más genéricas de tronco, aplicando la teoría de los tipos dendrométricos. Estudiar la forma del tronco en principio es complicado, pues no existe una definición exacta y clara de este concepto.

Lo cierto es que existe una amplia variabilidad en la forma del tronco principal de los árboles, debido a la variación en la tasa de disminución del diámetro conforme ascendemos en altura a lo largo del tronco. El decrecimiento en diámetro varía, no sólo por especie, sino también en función de la edad, del diámetro normal, de la altura del árbol y de la calidad de estación.

Sería deseable definir métodos que informasen acerca de la forma del tronco, independientemente del diámetro y de la altura del mismo. A continuación veremos los 4 métodos más utilizados para estudiar la forma del tronco de los árboles:

1. Cocientes de forma
2. Coeficientes mórficos
3. Punto de forma
4. Tablas, curvas o fórmulas de decrecimiento de la sección

4.2.2. COCIENTES DE FORMA

Un cociente de forma intenta expresar la relación existente entre dos diámetros del árbol, correspondientes a dos secciones distintas (secciones de referencia 1 y 2):

$$q = \frac{d_1}{d_2}$$

El cociente de forma, después de la altura y el diámetro normal, es probablemente el ratio más importante para predecir el volumen del tronco de un árbol. El primer cociente de forma es el de Schiffel (1899) y en él se relaciona el diámetro a la mitad de la altura del árbol con el propio diámetro normal del árbol. Por ello puede definirse como el **cociente de forma normal (q_n)**, cuya expresión es:

$$q_n = \frac{d_{0,5h}}{d_{1,30}}$$

Dado que si el árbol es menor de 2,60 m el coeficiente podría valer >1, JONSON (1911) definió el **cociente de forma absoluto (q_a)**

$$q_a = \frac{d_{0,5(h+1,30)}}{d_{1,30}}$$

Este último cociente expresa mejor la forma del tronco, pero aún así no es una expresión pura de la forma del tronco, pues varía en función de la especie, del diámetro y de la altura del árbol.

Los cocientes se pueden calcular con o sin corteza. Si se hace con corteza, aparece un distorsionamiento de la forma por el espesor de la misma, aunque también es difícil estimar con exactitud el diámetro sin corteza.

Partiendo del cociente de forma absoluto podrían definirse las denominadas clases de forma. Así por ejemplo, las clases 0,60-0,65, 0,65-0,70, etc, englobarían a árboles con forma semejante. Para calcular el volumen de los árboles, éstos se deberían clasificar por clases de forma, clases diamétricas y alturas, con el fin de homogeneizar y dar más validez a las ecuaciones o tablas numéricas a aplicar.

Las clases de forma se pueden relacionar con la densidad de la masa (JONSON, 1911) y con el punto de forma (FOLGELBERG, 1953). El término clase de forma tiene en EE.UU. un sentido diferente, pues las clases de forma se definen en relación al denominado cociente de forma de Girard (1939). Este coeficiente de forma se define de la siguiente manera:

$$q_G = \frac{d_{sc17,3\ feet}}{d_{cc1,30}} \times 100$$

Siendo: $d_{sc17,3\ feet}$: diámetro sin corteza a 5,30 m (1 pie (*feet*) = 0,305 m)
 d_{cc} : diámetro con corteza a 1,30 m

Algunas ventajas del cociente de forma de Girard son las siguientes:

- a) Puede medirse el diámetro a 5,3 m fácilmente con una forcípula finlandesa

- b) El diámetro de referencia está lo bastante cerca del suelo como para dar una medida del engrosamiento del tronco
- c) El espesor de corteza es también tenido en cuenta y su efecto es el decrecimiento parcial eliminado

Otro cociente de forma es el de Mass: $q_M = \frac{d_{2,30m}}{d_{1,30m}}$, pero presenta el

inconveniente de que es muy variable a igualdad de especie, diámetro y altura por lo que presenta poco uso práctico.

Dentro de los diferentes tipos de cociente de forma destacaremos los denominados **cocientes de forma perfectos**. Estos cocientes son "perfectos" porque informan de la forma del árbol independientemente de su tamaño. Permiten además caracterizar la forma de un árbol que se ajusta a un determinado tipo dendrométrico. Dentro de ellos la serie de cocientes de forma de Hohenadl (1936) ha sido muy utilizada, pues definirá además un coeficiente mórfico o de forma.

Para el cálculo de la serie de cocientes de forma de Hohenadl, se divide el tronco del árbol en cinco trozas iguales, de longitud $0,2h$, y se miden los diámetros en la mitad de cada troza. A continuación se calculará, para cada troza, un cociente de forma (η_i), tomando como referencia la sección situada a $0,9h$ de la cima del árbol (Figura 4.2):

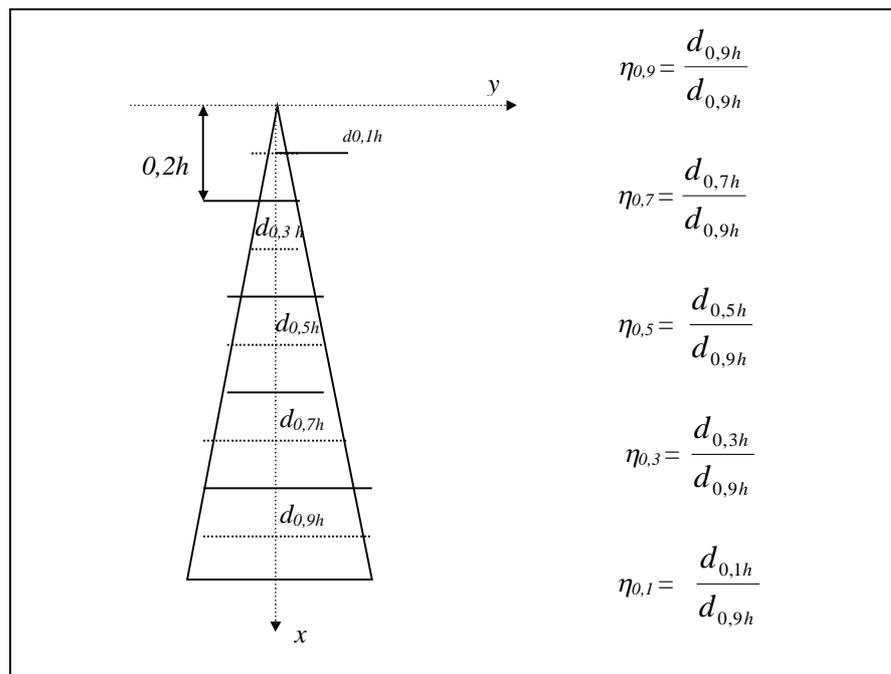


Figura 4.2. Cálculo de la serie de cocientes de Hohenadl

El tronco así definido puede cubicarse aplicando la fórmula de Huber por secciones:

$$V = \frac{\pi}{4} d_{0,9}^2 0,2h + \frac{\pi}{4} d_{0,7}^2 0,2h + \frac{\pi}{4} d_{0,5}^2 0,2h + \frac{\pi}{4} d_{0,3}^2 0,2h + \frac{\pi}{4} d_{0,1}^2 0,2h$$

Factorizando en función de $0,2h$ obtendremos:

$$V = \frac{\pi}{4} 0,2h \times [d_{0,9}^2 + d_{0,7}^2 + d_{0,5}^2 + d_{0,3}^2 + d_{0,1}^2]$$

Si sustituimos los diámetros medios por sección por los cocientes de forma, se obtendrá precisamente una expresión del volumen en función de los cocientes de forma perfectos:

$$V = \frac{\pi}{4} 0,2h \times [d_{0,9}^2 \eta_{0,9}^2 + d_{0,9}^2 \eta_{0,7}^2 + d_{0,9}^2 \eta_{0,5}^2 + d_{0,9}^2 \eta_{0,3}^2 + d_{0,9}^2 \eta_{0,1}^2]$$

$$V = \frac{\pi}{4} 0,2h \times d_{0,9}^2 \times [1 + \eta_{0,7}^2 + \eta_{0,5}^2 + \eta_{0,3}^2 + \eta_{0,1}^2]$$

Finalmente el volumen será:

$$V = \frac{\pi}{4} h \times d_{0,9}^2 \left[\frac{1 + \eta_{0,7}^2 + \eta_{0,5}^2 + \eta_{0,3}^2 + \eta_{0,1}^2}{5} \right]$$

A la media de la suma cuadrática de los cocientes de forma de Hohenadl se le denomina **coeficiente mórfo de Hohehadl**, $\lambda_{0,9}$:

$$V = \frac{\pi}{4} h \times d_{0,9}^2 \times \lambda_{0,9}$$

Y al resto de factores se le denomina WALZE (cilindro en el idioma alemán, $W_{0,9}$), que representará el volumen de un cilindro de sección igual a la situada a $0,9h$ del vértice del árbol, y de altura la total del árbol ($W_{0,9} = \frac{\pi}{4} d_{0,9}^2 \times h$), es decir:

$$V = W_{0,9} \times \lambda_{0,9}$$

4.2.3. COEFICIENTES DE FORMA O MÓRFICOS

Es la relación entre el volumen de un árbol y el volumen de un sólido de revolución de referencia. Normalmente se usa como sólido de referencia el cilindro con sección la del árbol a 1,30 m y altura la total la del árbol considerado:

$$f = \frac{V_{real}}{\frac{S_o h}{n+1}} = \frac{V_{real}}{S_o h} = \frac{V_{real}}{\frac{\pi}{4} d_o^2 h}$$

Dependiendo de la sección y del volumen real del tronco o del fuste hay distintas definiciones para este cociente.

1. Coeficientes mórficos imperfectos: son los referidos a la sección normal del cilindro. Podemos llamarlos así porque dependen de la especie, edad y espesura de la masa.

- ✓ Coeficiente mórfico del tronco; $f = \frac{V_{REAL\ TRONCO}}{\frac{\pi}{4} d_n^2 h_{tronco}}$
- ✓ Coeficiente mórfico del fuste; $f = \frac{V_{REAL\ FUSTE}}{\frac{\pi}{4} d_n^2 h_{fuste}}$

2. Coeficientes mórficos perfectos: referidos a otras secciones del árbol.

- ✓ Coeficiente mórfico perfecto de Hohenadl; $\lambda_{0,9} = \frac{V_{REAL\ TRONCO}}{\frac{\pi}{4} d_{0,9}^2 h_{tronco}}$
- ✓ Coeficiente mórfico absoluto; $f_o = \frac{V_{REAL\ TRONCO}}{\frac{\pi}{4} d_o^2 h_{tronco}}$

Se puede demostrar que para dos pies que pertenecen al mismo tipo dendrométrico pero tienen tamaños diferentes, los coeficientes mórficos respecto a la sección normal difieren entre sí, mientras que el coeficiente mórfico perfecto de Hohenald tiene el mismo valor.

Para demostrar esas propiedades supondremos dos árboles que presentan troncos paraboloides, y calcularemos para ambos los coeficientes mórficos imperfecto y perfecto. Los valores de los exponentes y los factores de amplitud de las líneas de perfil serán:

$$\begin{aligned} n_1 &= n_2 = n = 1 \\ \rho_1 &= \rho_2 = \rho \\ y^2 &= \rho x \end{aligned}$$

El volumen real del tronco de los dos árboles será obtenido mediante la teoría de los tipos dendrométricos:

$$V_R = \frac{S_o h}{n+1} = \frac{\pi y^2 h_1}{n+1} = \frac{\pi \rho h_1 h_1}{2}$$

El coeficiente mórfico imperfecto para el árbol 1 (f_1) será:

$$f_1 = \frac{V_{R1}}{W_1} = \frac{\frac{\pi \rho h_1^2}{2}}{\pi \rho (h_1 - 1,30) h_1} = \frac{h_1^2}{2(h_1 - 1,30) h_1} = \frac{h_1}{2(h_1 - 1,30)}$$

Análogamente obtendremos el coeficiente mórfico imperfecto para el árbol 2 (f_2):

$$f_2 = \frac{V_{R2}}{W_2} = \frac{\frac{\pi r h_2^2}{2}}{\pi r (h_2 - 1,30) h_2} = \frac{h_2^2}{2(h_2 - 1,30) h_2} = \frac{h_2}{2(h_2 - 1,30)}$$

La relación entre ambos coeficientes mórficos imperfectos será $\frac{f_1}{f_2}$:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{h_1 2(h_2 - 1,30)}{h_2 2(h_1 - 1,30)} = \frac{h_1 (h_2 - 1,30)}{h_2 (h_1 - 1,30)} = \frac{\left(1 - \frac{1,30}{h_2}\right)}{\left(1 - \frac{1,30}{h_1}\right)}$$

Es decir $\frac{f_1}{f_2} = 1$ solamente cuando $h_2 = h_1$

Y además se cumple que si $h_1 > h_2 \rightarrow f_2 < f_1$

Queda demostrado que el coeficiente mórfico imperfecto depende del tamaño del árbol, y que cuanto más grande sea el árbol menor será el coeficiente mórfico. Veamos ahora la dependencia del tamaño en el coeficiente mórfico perfecto de Hohenadl. Para el árbol 1 el cálculo de este coeficiente perfecto ofrecerá el siguiente valor:

$$\lambda_{0,9} = \frac{\frac{\pi r h_1^2}{2}}{\pi r x_{0,9} h_1} = \frac{\frac{\pi r h_1^2}{2}}{\pi r 0,9 h_1} = 0,555$$

Para el árbol 2 la expresión se desarrollará análogamente al caso anterior:

$$\lambda_{0,9} = \frac{\frac{\pi r h_2^2}{2}}{\pi r x_{0,9} h_2} = \frac{\frac{\pi r h_2^2}{2}}{\pi r 0,9 h_2} = 0,555$$

Luego queda demostrado que este coeficiente sólo depende de la especie y no del tamaño, pues como se ve su valor permanecerá constante.

4.3. PUNTO DE FORMA

El punto de forma es la relación expresada en porcentaje, entre la altura del centro de resistencia al viento en el árbol (aproximadamente el centro de gravedad de la copa) y la altura del árbol (JONSON, 1912). Jonson introdujo la hipótesis de que la forma de un tronco depende de los esfuerzos o tensiones mecánicas que soporta el árbol, procedentes fundamentalmente del peso propio del pie, de la fuerza del viento y el peso de la nieve a los que el árbol está sometido.

De ellos el viento es la acción mas importante y será el factor responsable de que el árbol forme un tronco tal que, la resistencia relativa a la fractura, sea la misma en todos los puntos del eje longitudinal del tronco. Por ello, lo determinante en la forma del tronco es el punto de mayor resistencia a la flexión del viento, o punto de forma de la fuerza del viento.

Como la copa es la parte del árbol que mayor resistencia ofrece al viento, allí es donde estará localizado dicho punto, y más concretamente en el centro de gravedad de la misma, variando la talla y forma de la copa en función de los esfuerzos a que se somete al árbol. Cuanto mayor sea el punto de forma en relación a la altura total, más cercana estará la forma del árbol al tipo dendrométrico cilindro.

Si en una masa forestal se eligen muestras de árboles pertenecientes a distintas clases diamétricas, y se obtiene para cada árbol su punto de forma y para cada clase diamétrica su punto de forma medio, utilizando este último como término independiente se pueden obtener, mediante análisis de regresión, la clase de forma del tronco. También podrá obtenerse la clase de forma de la masa si la regresión se ha realizado para el total de la masa.

La principal utilidad que tiene el punto de forma es la de predecir el cociente de forma absoluto, pues se ha comprobado que existe buena correlación entre el cociente de forma absoluto y el punto de forma. Las limitaciones de sus uso vienen impuestas debido a que el punto de forma dentro de la masa varía con la densidad de la copa y con la posición de la copa en la masa, por lo que este punto a veces es difícil localizarlo.

4.4. TABLAS, CURVAS O FÓRMULAS DE DECRECIMIENTO

Si tomamos medidas suficientes de diámetros a distintas alturas del tronco de un conjunto de árboles, clasificados por clases de forma y tamaño, podremos preparar las denominadas *tablas de decrecimiento*, que son tablas que muestran gráficamente la forma del tronco del árbol. Con estas tablas de decrecimiento del diámetro también será posible poder determinar el volumen de los árboles.

El método de preparación de tablas de decrecimiento más utilizado consiste en dar el valor medio de decrecimiento de las trozas hacia arriba del tronco, sin corteza, para longitudes estándar de trozas. Así, para una determinada especie, se obtienen las siguientes tasas de decrecimiento en función del diámetro normal y longitud de troza de 5 m (Figura 4.3):

	2 trozas	3 trozas		4 trozas		
<i>dn</i>	2°	2°	3°	2°	3°	4°
	1,9	1,5	1,7	1,2	1,6	2,1

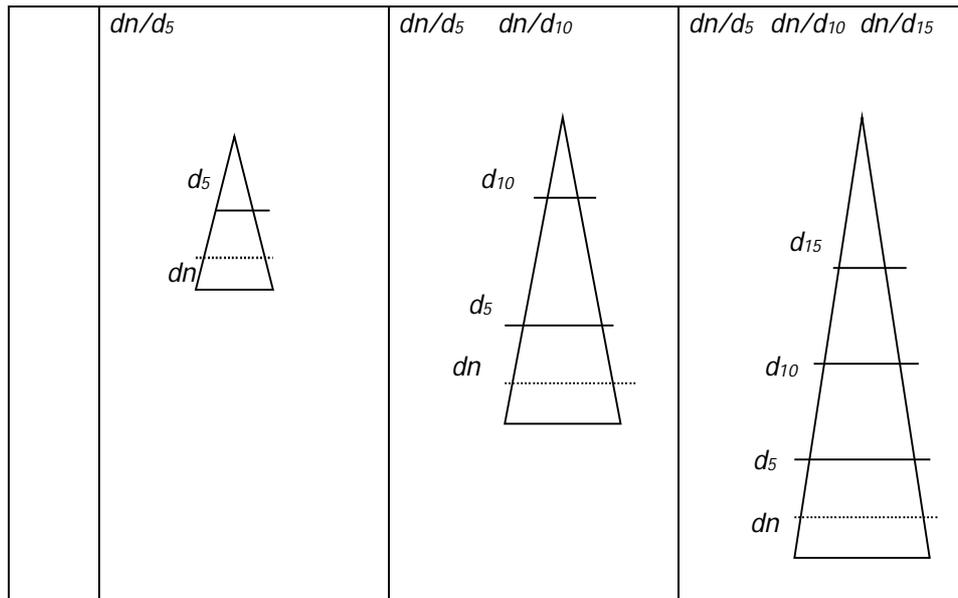


Figura 4.3. Tablas de decrecimiento del diámetro de un árbol

Las tablas de decrecimiento también se puede expresar por *curvas o fórmulas de decrecimiento*. Las hay muchas y complicadas, no obstante Grosenbaugh (1954) indica que no es nada aconsejable utilizar funciones para obtener las tablas, pues basta con métodos gráficos o funciones sencillas para obtener buenos resultados.

Una curva de decrecimiento fue propuesta por Kozac *et al* (1969), que mostraba que para ciertas especies de coníferas, los diámetros situados a lo largo del tronco se pueden predecir mediante una función parabólica del tipo:

$$\frac{d^2}{d_n^2} = b_0 + b_1(h/H) + b_2(h/H)^2$$

Siendo:

- d : diámetro del tronco sin corteza a una altura h
- H : altura total del pie
- dn : diámetro normal sin corteza

4.5. LA FORMA DE LA COPA

4.5.1. INTRODUCCIÓN

La cuantía y forma que posee la copa de un árbol está muy relacionada con el tronco de ese pie. Es importante saber cuantificar o describir la forma de la copa de los árboles por las siguientes razones:

1. Es un elemento que supone un aumento de costes en las operaciones selvícolas, ya que se constituye como un residuo de leñas delgadas que es necesario quemar o triturar al finalizar las cortas, suponiendo un gasto de tiempo y de trabajo adicional
2. Desde el punto de vista del inventario forestal, mediante fotografía aérea, es posible determinar el número de árboles de un monte contando el número de copas, además podremos extraer la relación existente entre el diámetro de copa y el diámetro normal, para determinar el parámetro fracción de cabida cubierta. La copa puede ser una variable de interés al hacer inventarios con fotografía aérea, ya que a través de la proyección de copa se podría intentar estimar directamente el volumen del tronco
3. La copa tiene un papel fundamental desde el punto de vista ecológico, porque en ella tiene lugar la fotosíntesis, y al producirse biomasa se podría cuantificar la capacidad productiva. Además las copas ayudan a frenar la erosión y crean un microclima especial debajo del dosel

III.2. PARÁMETROS QUE DEFINEN LA COPA

Los parámetros utilizados para definir la copa de los árboles son los siguientes:

- 1) Diámetro de la copa
- 2) Profundidad de la copa
- 3) Arquitectura de la copa

1. Diámetro de la copa

El diámetro de una copa es el diámetro de la proyección horizontal sobre el suelo de la copa del árbol. El interés está en poder deducir a través del diámetro de la copa el área de la proyección de la copa, suponiendo que ésta es marcadamente circular (cosa que muchas veces no ocurre).

El área de la proyección de la copa es un importante parámetro dasométrico, pues a través de la suma de las proyecciones de las copas de los árboles de un determinado área podremos calcular el parámetro de la masa *fracción de cabida cubierta (Fcc)*. La *Fcc* representa el porcentaje de suelo cubierto por las copas de los árboles en una determinada zona del monte.

Si bien es realmente difícil obtener el verdadero valor tanto del diámetro como de la superficie de la proyección (gran irregularidad en las copas) hay distintos procedimientos de medir la forma de una copa. Por ejemplo, para monte alto podremos medir dos diámetros perpendiculares entre sí y hacer una media de ellos, de manera que la superficie de la proyección será, asimilando su forma a un círculo:

$$d_m = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

$$S = \frac{\pi}{4} d_m^2$$

Esa sería la manera más simple de medir una copa y dar su valor diametral medio. No obstante existe un procedimiento más exacto, que consiste en medir distintos radios y hallar el área de la poligonal generada por la proyección. Para replantear puntos característicos de la copa del árbol se puede utilizar una pértiga con una plomada en su extremo, que irá marcando la proyección ortogonal de la forma de la copa en el suelo (figura 4.4):

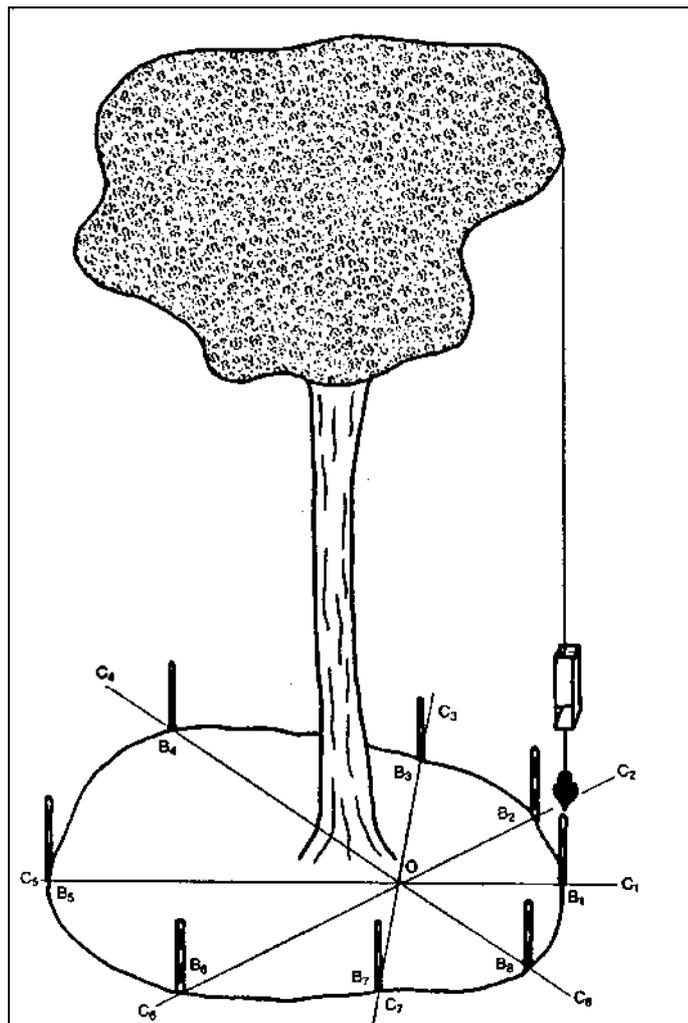


Figura 4.4. Replanteo de puntos característicos de la copa (tomado de PARDÉ, 1994)

Una vez señalada sobre el terreno la forma de la copa, pueden radiarse en campo sus puntos característicos mediante el uso de una brújula y de la cinta métrica, siéndole asignada posteriormente en gabinete a cada punto de la copa una coordenada rectangular o polar (figura 4.5):

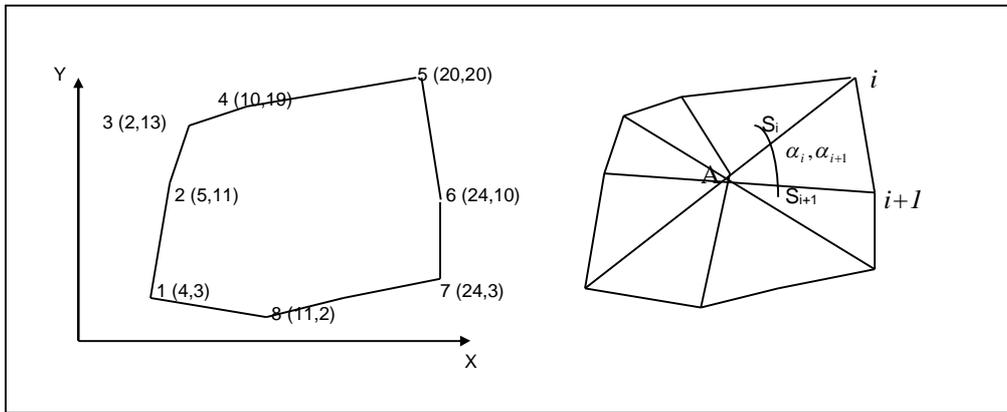


Figura 4.5. Cálculo de la superficie de copa por coordenadas rectangulares y polares

Donde:

$$x_i = d_i \times \cos \alpha$$

$$y_i = d_i \times \text{sen} \alpha$$

La superficie de la proyección de la copa podrá calcularse entonces de la siguiente manera:

- Por coordenadas rectangulares:
$$S_{\text{copa}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i (y_{i-1} - y_{i+1})$$
- Por coordenadas polares:
$$S_{\text{copa}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n S_i \times S_{i+1} \times \text{sen}_{i,i+1}$$

2. Profundidad de la copa

Es la diferencia entre la altura total del árbol y la altura donde empieza la copa. El problema radica precisamente en donde considerar que empieza la copa; se suele considerar que el inicio sería aquel verticilo donde al menos el 50% de las ramas están vivas. Podemos entonces asimilar la copa como un cilindro de base la superficie de la copa y altura igual a la profundidad de la copa.

3. Volumen de la copa

Se puede cubicar la copa de un árbol suponiendo que se asemeja a una forma cilíndrica en función de la superficie de su proyección (S_{copa}) y de su profundidad (P_{copa}):

$$V_{\text{copa}} = P_{\text{copa}} \times S_{\text{copa}}$$

No obstante sería éste un volumen aparente, puesto que la copa no es un cuerpo macizo. El volumen real (tronco, más ramas y más follaje) debería obtenerse multiplicando el volumen aparente por un factor reductor, que eliminaría el volumen de huecos que quedarían entre las ramas y hojas y que se consideran como pertenecientes al cilindro. Con esta corrección, realmente muy complicada de realizar, se podría estimar el volumen real de los elementos que forman una copa. Adicionalmente, para mejorar la estimación del volumen de copas se podría pensar en el estudio de coeficientes mórficos para las copas.

4. Arquitectura de la copa

Este parámetro resulta vital para determinar la capacidad de intercepción de luz por el árbol y con ello predecir su capacidad fotosintética. La arquitectura de la copa hace referencia a los siguientes elementos:

- ✓ número de ramas principales, secundarias, terciarias de la copa
- ✓ inclinación media de ramas y ramillos
- ✓ cantidad de follaje, forma de distribución e inclinación de éste
- ✓ área foliar por estratos de la copa

Dentro de los parámetros más importantes a medir en la copa para comprender su arquitectura, encontramos al denominado como índice de área foliar (*leaf area index* ó *LAI*) Además de describir muy bien la arquitectura de la copa, es un estimador de la eficiencia en la captura de la luz para realizar la fotosíntesis. Se define el *LAI* como la suma de la superficie de todas las hojas que hay en un árbol (si son acículas sería el área de su proyección) dividido por la superficie de la proyección de la copa en el suelo:

$$LAI = \frac{\sum \text{Area hojas}}{\text{Superficie copa (área proyectada)}}$$

El conocimiento del valor del *LAI* resulta de gran importancia a la hora de analizar los ecosistemas forestales, debido a su gran relevancia en múltiples aspectos ya investigados:

- ✓ en el análisis de las cubiertas y de su influencia en los intercambios de gas, agua, carbono y energía (Gower & Norman, 1991)
- ✓ puede ser útil para determinar tempranos síntomas de estrés natural o antropogénico en los ecosistemas forestales
- ✓ es una medida apropiada de la habilidad de las especies en una masa mixta para competir por la luz disponible, por lo que podrá ser usado para cuantificar la competición por la luz entre las especies (Walker, Blackswhaw y Dekker, 1998)
- ✓ ser útil en masas de especies forestales para predecir la productividad de las mismas (Lang, 1987)

El LAI puede ser referido al árbol individual o a la masa forestal. Existen dos métodos para determinar el LAI tanto en árboles individuales como en masas forestales:

1. Métodos directos. Consiste en tomar muestras de hojas y determinar las áreas foliares mediante tratamiento digital de imágenes. El área foliar total se estima mediante estimadores de razón u otro procedimiento inventarial
2. Métodos indirectos. Mediante sofisticados aparatos que miden la atenuación de la radiación difusa al pasar por el dosel vegetal. El más utilizado es el LAI-2000 Plant Canopy Analyzer de la casa Licor (LI-COR I., 1991).

Si bien las mediciones directas del LAI pueden llegar a ser más exactas, éstas estimaciones realizadas en árboles forestales individuales y en bosques son realmente muy laboriosas, por lo que últimamente se han desarrollado nuevas teorías e instrumentación que permiten la medición de forma indirecta, más rápidamente.

Como fruto de tales avances, se puede conocer información sobre la densidad y la superficie del follaje, así como de su orientación relativa a la radiación incidente. Actualmente pueden ser utilizados varios instrumentos para la determinación indirecta del LAI, en base a la transmisión de la radiación en la cubierta forestal y apoyándose en teorías básicas de cálculo como son la Ley de Lambert-Beer o la Teoría de la Fracción de Gaps (huecos).

Básicamente estas teorías intentan calcular una transmitancia (diferencia de radiación difusa por encima y por debajo de un dosel forestal) en función de la radiación difusa que no es interceptada por el dosel vegetal y que por tanto pasa a los estratos inferiores. Todas estas teorías han dado pie a interesantes investigaciones a nivel internacional tales como:

- ✓ LANG (1987) afirmó que el LAI podría ser determinado para cubiertas forestales a partir de mediciones de la transmitancia de los rayos del sol en la cubierta forestal
- ✓ Pierce y Running (1988) dieron cuenta de una fuerte correlación ($R^2= 0,94$) entre estimaciones directas del LAI en bosques de coníferas y estimaciones indirectas obtenidas con un "portable integrating radiometer" (Sunfleck Ceptometer, Decagon Devices, 1987)
- ✓ Rich (1990) ha usado un "hemispherical photographs" como aparato adecuado para la determinación indirecta del LAI en bosques

- ✓ Gower & Norman (1991) realizaron mediciones con el aparato LAI-2.000 de manera que pudieron estimar el LAI real en masas de especies de hoja ancha y de coníferas, y compararon el valor de esos valores del LAI con los obtenidos con el LAI-2.000, obteniéndose una fuerte correlación ($R^2 = 0,96$). De este estudio se dedujo que la estimación indirecta infraestimaba el valor del LAI, pero con estos métodos podríamos llegar a describir la estructura vertical de la vegetación

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- GIRARD, J.W. (1939). *Timber cruising*. For. Serv. US-Dep. Of Agr.
- GOWER, S. & NORMAN, J. (1991). *Rapid stimation of leaf area index in conifer and broad-leaf plantations*. Ecology 72 (5) pp. 1896-1900
- GROSENBAUGH, L. (1954). *New tree- measurement concepts: eight accumulation, giant tree, taper, and shape*. For. Exp. St. Occ. Pp 134
- HOHENADL, W. (1936). *Die Bestandesmessung*. Fuw. Cbl.
- KOZAC, A; MUNRO, D.D; SMITH, J. (1.969). *Taper functions and their application in forest inventory*. For. Chron. 45 (4): pp 1-6.
- LANG, A. (1987). *Simplified stimate of leaf area index from transmittance of the sun's bean*. Agricultural and Forest Meteorology. 41 pp. 179-186.
- LI-COR I. (1991). *LAI-2000. Plant Canopy Analyzer. Operating manual*. Lincoln, Nebraska 68504. USA
- PARDE, J. and BOUCHON, J. (1994). *Dasometría*. Versión española de Dendrométrie. Traducido por Prieto Rodríguez, A. y López Quero, M. Ecoly Nationale des Eaux et Forêts (ENGREF). Nancy (Francia). Madrid: Edit. Paraninfo.
- RICH, P. (1990). *Characterizing plant canopies with hemisphaerical photograp*s. Remote Sensing Reviews. 5: 13-29
- SCHIFFEL, A. (1899). *Form und Inhalt der Fichte*. Mitt. a. d. forstl. Versuchswesen Österreichs.
- WALKER, T; BLACKSHAW, N and DEKKER, M. (1988). *Architectural distribution of canopy elements in individual Pinus radiata Don. crows and the effects of cumpling on radiation interception*. Tree Physiology 7. pp. 135-155.

CAPÍTULO 5

CUBICACIÓN DE MADERAS DELGADAS (ROLLIZOS Y LEÑAS) Y DE CORTEZAS. BIOMASAS LEÑOSAS Y FOLIARES

- I. INTRODUCCIÓN. CLASIFICACIÓN GENERAL DE LAS MADERAS**
- II. CUBICACIÓN Y PESAJE DE ROLLIZOS**
- III. CUBICACIÓN Y PESAJE DE LEÑAS**
- IV. BIOMASAS LEÑOSAS, FOLIARES Y TOTALES**
- V. CUBICACIÓN DE CORTEZAS**

5.1. INTRODUCCIÓN. CLASIFICACIÓN GENERAL DE LAS MADERAS

La madera se puede clasificar en dos tipos en función de sus dimensiones:

- 1) **Madera en rollo.** Son las maderas de sierra y desenrollo para elaboración industrial. El rollo generalmente se considera aquella troza de diámetro (sin corteza) en punta delgada > 20 cm y de longitud mayor de 2,5 m. La madera de sierra sirve para muebles, la de desenrollo se usa para obtener chapas de madera planas
- 2) **Madera de dimensiones menores.** Aquella que tiene un diámetro sin corteza < 20 cm; esta a su vez se puede clasificar en:
 - b) Madera delgada. Es la más gruesa dentro de ésta subdivisión, se caracteriza por tener un diámetro entre 10 y 20 cm en punta delgada. Constituyen lo que se denominan como rollizos. Estas maderas proceden de las claras que se realizan en el bosque
 - c) Leñas. Proceden de las ramas de los pies apeados, de las podas y de los resalvos. Se consideran dos tipos de leñas en función de su diámetro:
 - Leñas medianas: $2 \text{ cm} < \text{diámetro} < 10 \text{ cm}$
 - Leñas pequeñas: $\text{diámetro} < 2 \text{ cm}$

La madera también puede clasificarse en función del destino que vaya a tener:

- ✓ Madera entera: destinada a postes, vigas, pilares, decoración, etc.
- ✓ Madera desfibrada: toda la madera delgada que se tritura para obtener tableros de fibras, de partículas y pastas

Otra forma de clasificación de maderas se hace según su procedencia:

- ✓ Madera procedente del fuste
- ✓ Madera del rabeón y ramas gruesas
- ✓ Madera del tocón o de las raíces

5.2. CUBICACIÓN Y PESAJE DE ROLLIZOS

5.2.1. CUBICACIÓN DE ROLLIZOS

Para cuantificar la madera de rollizos hay que disponerlos apilados en forma de paralelepípedos, de tal manera que se cubicará el volumen aparente que ocupan. La unidad de volumen aparente de rollizos es el estéreo, es decir, 1 estéreo (1 st) es un m^3 de madera de rollizos incluyendo los huecos que dejan entre ellos (aire). Por tanto, nunca se sabrá la cantidad real de materia leñosa en un apilado (figura 5.1):

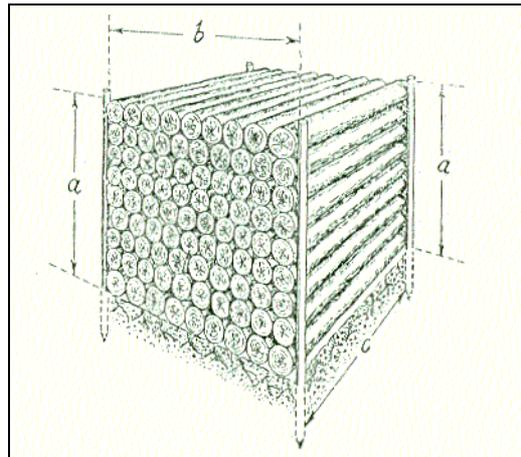


Figura 5.1. Apilado de rollizos: concepto de estéreo (tomado de MACKAY, 1964)

Para intentar estimar de la forma más exacta posible el volumen de madera de la pila de rollizos, se define el denominado *coeficiente de apilado* (Ca). Este coeficiente se obtiene de la relación entre el volumen real de madera de rollizos y el volumen aparente total que ocupan:

$$V_{\text{aparente}} (st) = a \times b \times c \text{ (m}^3\text{)}$$
$$V_{\text{real}} \text{ (m}^3\text{)} = V_{\text{aparente}} (st) \times Ca$$

El coeficiente de apilado depende de varios factores: diámetro, longitud y rectitud de las piezas, cantidad de corteza y nudos, homogeneidad en la formación de pilas, etc. En definitiva, los distintos métodos de cubicación de los rollizos pretenderán calcular un coeficiente de apilado medio aplicable a los estéreos medidos en el monte, una vez apilada la madera. Algunos procedimientos darán directamente el volumen leñoso, aunque esta información permitirá, si se desea, estimar también el coeficiente de apilado. Existen tanto métodos directos como indirectos para hallar el volumen de rollizos:

A) Métodos directos:

1. Método del volumen aparente (coeficiente de apilado teórico)
2. Dimensiones de las testas (tarifa de cubicación)
3. Volumen por inmersión

B) Métodos indirectos:

1. Regla de Snelman
2. Metro cuadrado móvil
3. Parrilla de puntos
4. Regla de Bitterlich

A) Métodos directos de cubicación de rollizos

1. Método del volumen aparente

Se supondrá un coeficiente de apilado teórico (Cat) que sólo depende de la forma de apilar los rollizos. En principio se apilarán los rollizos, de manera ordenada, al cuadradillo o al tresbolillo (figura 2.2):

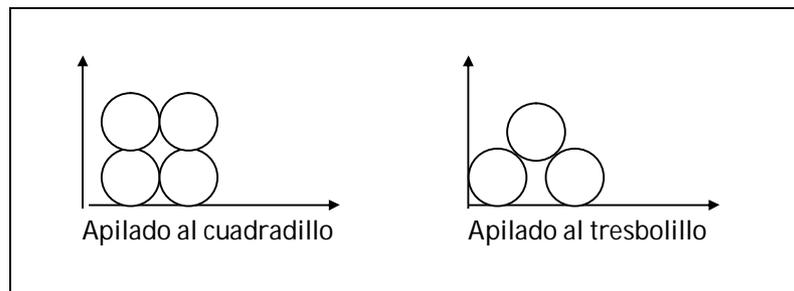


Figura 2.2. Tipos de apilado de rollizos

$$V_{real} = V_{aparente} \times Cat$$

El coeficiente de apilado teórico puede calcularse mediante el análisis geométrico de la pila construida. Así, para un apilado al cuadradillo de longitud l , Cat se calculará mediante relación en volumen de los rollizos con respecto al volumen total de la pila formada (figura 2.3):

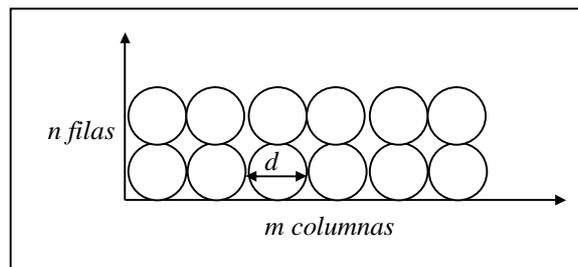


Figura 2.3. Cálculo del coeficiente de apilado para distribución de rollizos al cuadradillo

- Volumen total de la pila: $V_p = (n \times d) \times (m \times d) \times l$
- Volumen total rollizos: $V_r = \left(\frac{\pi}{4} \times d^2 \times l\right) \times (m \times n)$

$$c_{at} = \frac{\left(\frac{\pi}{4} \times d^2 \times l \times m \times n\right)}{(n \times d \times m \times d \times l)} = \frac{\pi}{4} = 0,785$$

Siendo: $Cat = 0,785$ cuando el apilado es al cuadradillo
 $Cat = 0,907$ cuando el apilado es al tresbolillo

2. Dimensiones de las testas (tarifa de cubicación)

Consiste en clasificar las testas de los rollizos según sus diámetros, en función de los cuales se asignará un volumen a los rollizos mediante el uso de una ecuación de cubicación. Este procedimiento presupone la existencia o construcción de una tarifa de cubicación, en la que se exprese la relación

estadística que liga al diámetro de las testas (d_{testa}) con el volumen de rollizo real.

Lo deseable sería disponer de esas relaciones estadísticas, cosa que no siempre ocurre. Si deseamos construirlas, se tomarán muestras de rollizos de todos los diámetros, se clasificarán diametralmente sus testas y se cubicarán perfectamente para ajustar el modelo mediante análisis de regresión.

3. Volumen por inmersión

Se introducen los rollizos en un xilímetro. El xilímetro es un tanque de agua donde se introducen las trozas. La cantidad de agua desplazada sería el volumen real de los rollizos.

B) Métodos indirectos de cubicación de rollizos

Se basan estos métodos en estimar coeficientes de apilado (Ca) a través de procedimientos basados en las dimensiones de las testas.

1. Regla de Snelman

Se trata de una regla de una determinada longitud, normalmente 1 metro, que se sitúa en una de las caras de la pila, siendo contados los puntos de la regla que caen en madera. Después, el número de puntos que intersectan madera se divide entre el total de puntos posibles (puntos que caen en madera + puntos que caen en los huecos):

$$Ca = \frac{Pm}{Pt}$$

Siendo:

Pm : puntos que caen en madera

Pt : puntos totales

Esta operación se realizará en varias posiciones, pudiendo ser calculado un coeficiente de apilado medio.

2. Metro cuadrado móvil

Consiste en un cuadrado bastidor que se coloca sobre la pila, midiéndose en este caso la sección de madera que cae dentro del cuadrado.

$$Ca = \frac{Sm}{St}$$

$$Sm = n \times \frac{\pi}{4} d_m^2$$

Siendo:

Sm : sección media de los árboles que entran en el cuadrado

St : sección total del cuadrado (1 m²)

d_m : diámetro medio

n : número de árboles contados en el metro cuadrado (1 si entra entero, ½ si entra más de medio y 0 si entra menos de la mitad).

3. Parrilla de puntos

Consiste este método en hacer una fotografía de la pila para, posteriormente, superponer sobre ella una transparencia con una cuadrícula de puntos. A continuación se contaría los puntos que intersectan madera y se dividirían entre el número de puntos totales (figura 2.4):

$$Ca = \frac{Pm}{Pt} = \frac{Pt - Ph}{Pt} = 1 - \frac{Ph}{Pt}$$

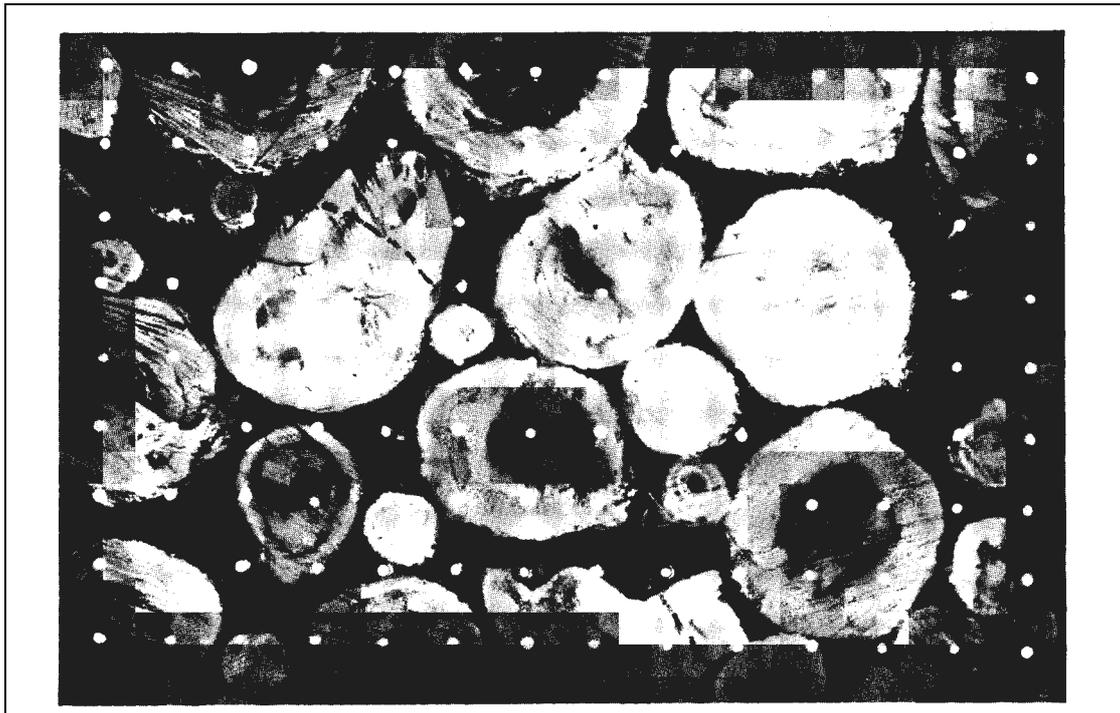


Figura 2.4. Método de cubicación mediante parrilla de puntos (tomado de HUSCH et al., 1984)

4. Regla de Bitterlich

Este método está basado en el denominado muestreo angular, que consiste en seleccionar árboles con un calibre angular fijo que es colocado en un punto y girado 360° haciendo encajar este calibre en la sección normal de los pies.

La selección de pies se realiza en función de la visual lanzada y del diámetro normal de los pies de la siguiente manera (figura 2.5):

- Si el diámetro normal es mayor que la abertura angular el árbol se contará como uno
- Si el $dn <$ abertura angular, no se selecciona
- Si el $dn =$ abertura angular, se cuenta como $\frac{1}{2}$

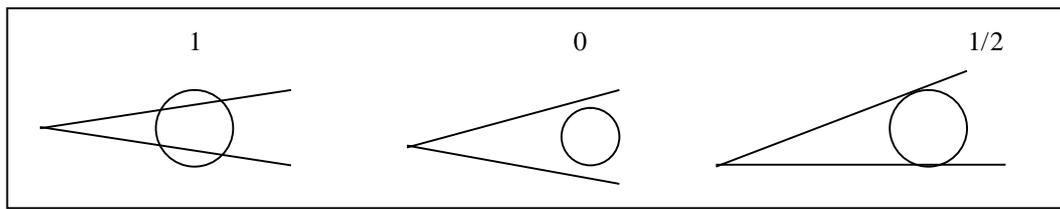


Figura 2.5. Selección de pies en el muestreo angular horizontal

Para el caso concreto de medición de testas el calibre angular se materializa en un bastidor de dimensiones tales que el diámetro máximo de la testa que cabe en la parte más ancha es de 24 cm (figura 2.6):

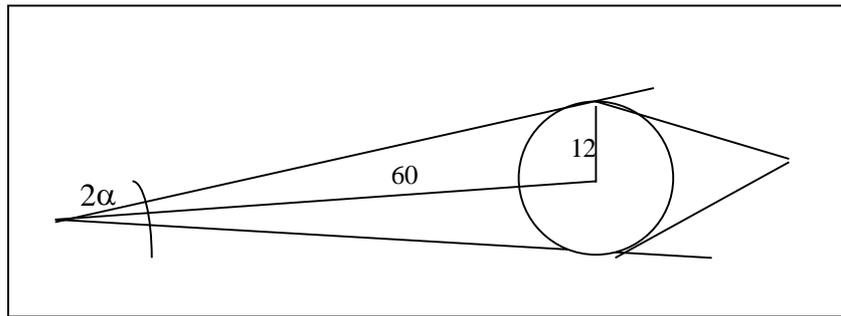


Figura 2.6. Calibre para el muestreo angular horizontal

$$\text{sen } \alpha = \frac{r}{R} = \frac{12}{60} = 0,2$$

Pues bien, se demostrará fácilmente que si realizamos un conteo de testas con el criterio indicado, llamando n el número de testas contabilizado, entonces se estima que el coeficiente de apilado para este caso será $Ca = 0,04 n$.

Supongamos que tenemos una pila de rollizos, todos del mismo tamaño, r_1 . Si realizamos un conteo angular en un estacionamiento j , en ese conteo entrarían todas las testas de las dimensiones indicadas (r_1) que estuvieran dentro del círculo hipotético de radio R_1 , porque todos ellos tendrían diámetro mayor o igual a la abertura angular prefijada.

Sea n_{ij} el número de testas de tamaño 1 que entran en el conteo angular:

$$R_1 = \frac{r_1}{0,2} \qquad \frac{\pi R_1^2}{1m^2} = \frac{\pi r_1^2 n_{ij}}{X_{1j}}$$

$$X_{1j} = \frac{\pi r_1^2 n_{ij}}{\pi R_1^2} = n_{ij} \times \text{sen}^2 \alpha$$

Si ahora suponemos que la pila tiene rollizos de dimensiones r_2 , llegaríamos a la conclusión de que por metro cuadrado de pila habría:

$$X_{2j} = n_{2j} \times \text{sen}^2 \alpha$$

De forma genérica para una dimensión de rollizo X_m :

$$X_{mj} = n_{mj} \times \text{sen}^2 \alpha$$

Pero la realidad es que las pilas suelen tener distintos tamaños. Por ello debemos realizar más estacionamientos y calcular un coeficiente de apilado medio. Podremos indicar que la superficie total de testas de todos los tamaños posibles por m² de pila sería:

$$\begin{array}{l}
 X_{1j} = n_{1j} 0,04 \\
 X_{2j} = n_{2j} 0,04 \\
 \vdots \\
 X_{mj} = n_{mj} 0,04
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 Ca = X_{1j} + X_{2j} + X_{3j} + \dots + X_{mj} = \sum_{i=1}^m n_{mj} \times 0,04 \\
 \text{(n hace referencia al n}^\circ \text{ de individuos de cada tamaño)}
 \end{array}$$

5.2.2. PESAJE DE ROLLIZOS

Dado el menor valor económico de estas piezas, cada día se está utilizando más el procedimiento de pesado debido a lo simple y económico que es, en lugar de utilizar la cubicación aparente. Evidentemente, al igual que en el caso de madera de sierra, la influencia de la humedad es importante, de tal forma que la oscilación de peso por estéreo puede ser, para el caso de pinos, de 600-350 kg /estéreo, según sea estimado en verde o en seco respectivamente.

No obstante, esto no tiene mayor importancia, pues el precio no es tan elevado como en madera de sierra, y además, tanto en comprada como en vendida, lo que interesa es la madera en verde, pues el precio va a corregir la merma.

Normas de pesaje (PARDÉ, 1961):

1. Salvo estipulación contraria, el resultado del peso deba estar relacionado con la masa anhidra expresada en toneladas de madera anhidra (en peso seco), después de la determinación de la humedad de una muestra
2. La utilización del peso está prohibida, salvo estipulación contraria, para determinar después el volumen mediante coeficientes empíricos, en el caso de utilización de madera basada en sus características dimensionales

Ventajas e inconvenientes del pesaje de los rollizos (PARDÉ, 1961):

Es obvio que este es un procedimiento rápido y más objetivo en la estimación por volumen, pero tiene los siguientes inconvenientes:

1. La densidad en verde de la madera (relación peso verde/volumen verde) disminuye en el curso de los días desde el derribo hasta la pesada
2. Esta densidad varía según las especies, y aún para una misma especie, según regiones y procedencias
3. En un mismo tronco, la densidad en verde disminuye radialmente cuando se progresa del cambium hacia el duramen; también disminuye longitudinalmente, desde el pie del árbol hasta la quinta parte de su altura, para aumentar a continuación hasta la cima. Y en un mismo árbol, la madera de las ramas no tiene la misma densidad que la madera del tronco, pues en general, es más que la madera del tronco en las resinosas
4. La densidad en verde varía también según las estaciones

Por tanto, es necesario ofrecer el peso de los rollizos en seco, esto es, sin contenido de humedad. Para ello, es preciso determinar los contenidos de humedad de muestras de rollizos para posteriormente extrapolarlos al conjunto de peso fresco de la madera.

Normas para la determinación del porcentaje de humedad de las muestras:

1. Tomaremos una muestra sin corteza sobre cada lote de madera, constituida por cierto número de segmentos o rodajas extraídas por aserrado sobre algunas piezas, preferentemente entre el primer cuarto y el primer tercio de su longitud
2. A continuación se mide la humedad sobre la muestra: pesaremos primero las rodajas muestra en fresco o verde (P_f), luego se secarán en estufa (105°C , unas 24 horas) para finalmente volver a pesarse en seco, sin humedad (P_s). El porcentaje de humedad se dará en función del peso seco según la expresión:

$$\text{Humedad (\%)} = \frac{P_f - P_s}{P_f} \times 100$$

Conocido el peso fresco o en verde total del lote de rollizos, su peso seco será ahora:

$$P_s = \frac{P_f}{1 + \frac{H(\%)}{100}}$$

5.3. CUBICACIÓN Y PESAJE DE LEÑAS

Las leñas son aquellas maderas con menos de 10 cm de diámetro. De forma comercial su cubicación se hace de igual manera que con rollizos, esto es, habrá que cortarla, apilarla y mediante coeficientes de apilado se podrá estimar su

volumen. En el caso de leñas tiene más importancia la forma de las piezas y la habilidad del operario para encajar las diferentes ramas, pues un apilado regular será más dificultoso.

En cuanto al peso de leñas, apuntar que se seguirá igualmente la metodología descrita para los rollizos, a través de la determinación de la humedad de muestras y posterior extrapolación de éstas al total de la pesada en verde.

5.4. BIOMASAS LEÑOSAS, FOLIARES Y TOTALES

Los valores de biomosas leñosas, subterráneas (raíces, cepa-tocón) y aéreas (tronco, ramas, hojas) interesa cada día más a los científicos de todo el mundo, con el fin de poder llegar a determinar la productividad biológica de los ecosistemas forestales y así como los balances de materia orgánica, agua y nutrientes.

El término biomasa hace referencia a la cantidad de tejidos que posee un vegetal una vez se le ha extraído toda su agua constitucional. Esto es, tanto las biomosas leñosas de tronco o ramas, como las foliares, deberán obtenerse por desecación de muestras en laboratorio para determinar los correspondientes contenidos de humedad. Igualmente en este caso, deberían ser obtenidas las biomosas corrigiendo los pesos totales en verde mediante los porcentajes de humedad obtenidos.

Para la determinación de las biomosas leñosas y foliares de un árbol, se deberá actuar siguiendo los procedimientos de obtención de los pesos secos en función de los contenidos de humedad de elementos muestra. En el caso de la biomasa del tronco, se cortará éste en trozas, se pesarán en fresco, y se determinará el contenido de humedad de una rodaja muestra, que será el que se aplique a cada troza. La división del tronco en trozas debe hacerse ya que el contenido de humedad varía en función de la altura de la sección en el tronco, debido a la mayor proporción de tejidos vivos (albura) con respecto a los muertos (duramen) conforme se asciendo en sección de referencia (figura 2.7):

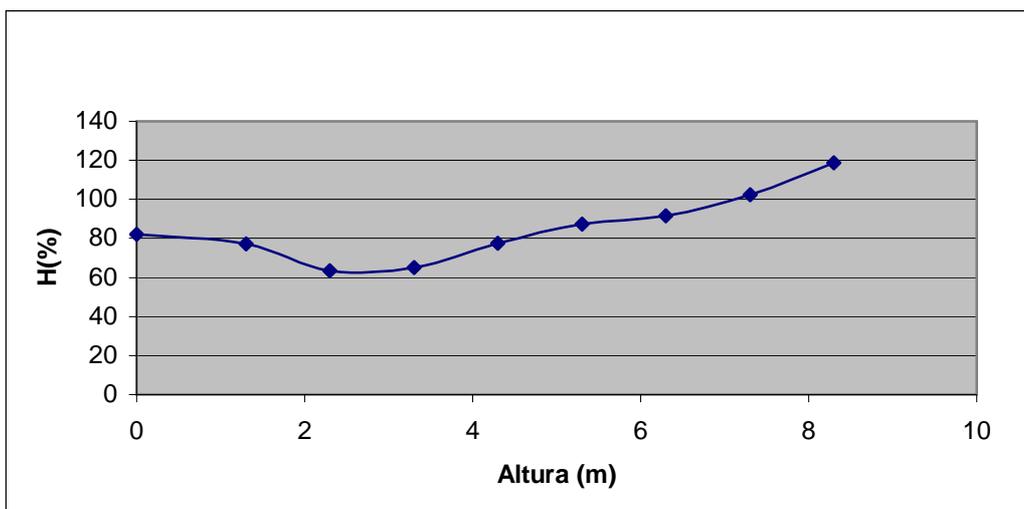


Figura 2.7. Variación del contenido de humedad a lo largo del tronco de un árbol maduro

En el caso de la biomasa foliar se procederá análogamente, a través de la humedad de diferentes muestras tomadas en diferentes estratos de la copa del árbol (normalmente dividiremos la copa en tres estratos distintos).

Al igual que ocurre con el volumen del árbol, las diferentes biomosas pueden ser relacionadas estadísticamente con los diferentes parámetros dasométricos más fácilmente medibles en el árbol, tales como los diámetros, las alturas, etc. Esto es una ventaja, pues mediante regresión significativa podrían ajustarse modelos de biomasa en árboles individuales que fueran posteriormente aplicables al resto de la masa con el fin de predecir las biomosas en todo el dosel. Así, la biomasa foliar está muy correlacionada con la superficie de albura a 1,30 m o en la base de la copa. Además, la superficie foliar también lo está con dicha sección de albura.

Biomasa foliar = f (sección de albura a 1,30 m ó sección de la base de la copa)

También resulta del mayor interés estudiar temporalmente la variación de las diferentes biomasa que conforman el árbol. Así MITSCHERLICH (1975) indica para el roble las siguientes variaciones:

- ✓ Tronco: aumenta el porcentaje de su biomasa con los años, y a partir de los 50 años aproximadamente representa el 66% de la biomasa total del árbol
- ✓ Ramas: también aumentan su porcentaje con los años, hasta alcanzar el 12% del total en la edad de madurez
- ✓ Raíces: a la edad de un año representan aproximadamente el 74%, pero luego van decreciendo en importancia hasta representar un 21% del total de la biomasa del pie
- ✓ Hojas: el primer año representan un 13% del total, después va disminuyendo hasta el 0,3% cuando el árbol es maduro

YOUNG (1964a y 1964b) estudió distintas especies y observó en todas ellas que el tronco aumentaba su biomasa con el paso de los años, al contrario la biomasa de las raíces, ramas y hojas disminuían con el tiempo.

5.5. CUBICACIÓN DE CORTEZAS

Es importante cubicar la corteza del tronco de un árbol, bien para su utilización comercial (corcho, taninos, etc) o bien para estimar la cantidad de residuo que tendremos que desechar en el aprovechamiento maderero. La medición de la corteza en árboles y secciones es una tarea tediosa y complicada, en algunas especies casi imposible, buscándose entonces una relación del espesor con algún otro parámetro del árbol más fácil de estimar, por ejemplo el diámetro con corteza. Hay que tener en cuenta también que el espesor de corteza varía entre especies y muestra una relación cambiante con la edad y con la altura del fuste (figura 2.8):

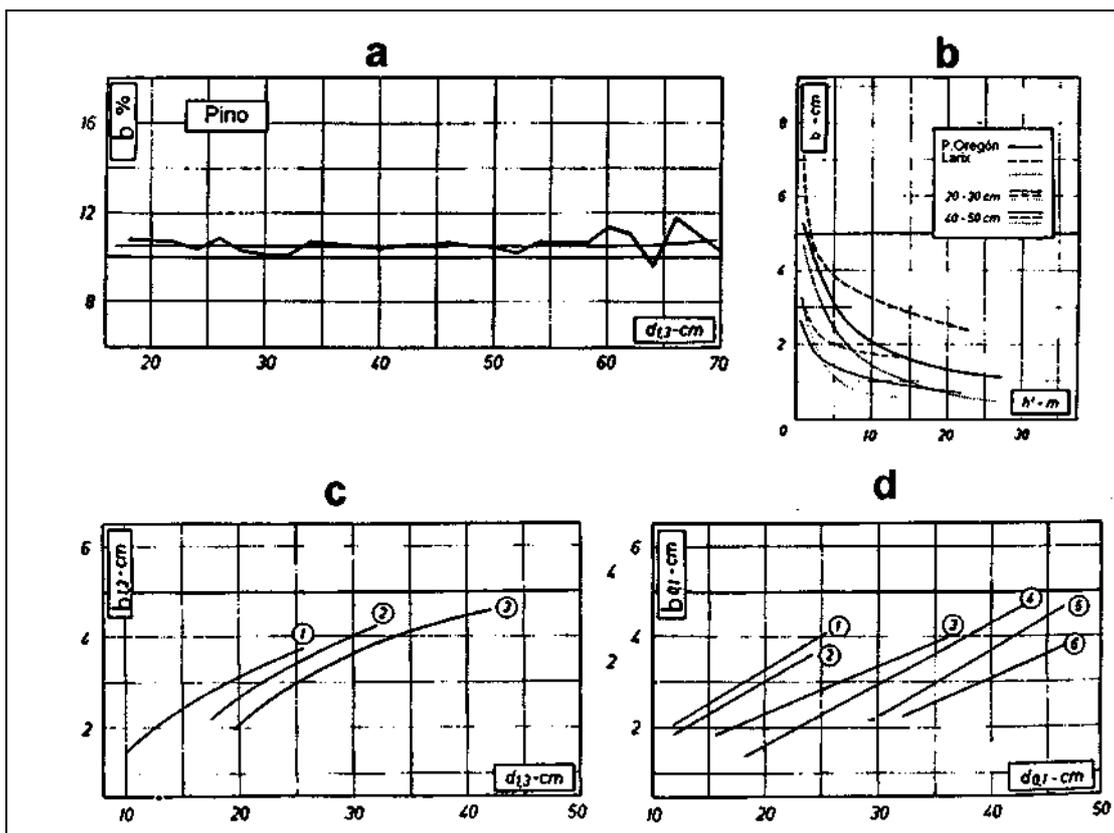


Figura 2.8. Distintas relaciones para la estimación del espesor de corteza (tomado de PRODAN, 1951)

a: en función del diámetro normal

b: en función de la altura sobre el fuste

c: en función del diámetro normal para diferentes clases de altura

d: en función del diámetro a un décimo de la altura para clases de edad

Se pueden construir tablas y ecuaciones que nos permiten predecir el volumen sin corteza, sabiendo la relación entre los diámetros sin corteza y con corteza:

$$d_{sc} = d_{cc} - 2e$$

Resulta muy común ajustar un modelo estadístico que relacione directamente el espesor de corteza con el diámetro con corteza, según una expresión lineal del tipo:

$$ec = a + bd_{cc}$$

También es posible estimar directamente el volumen sin corteza en función del diámetro normal, sobre todo en aquellas especies de maderas muy apreciadas. Normalmente los modelos que calculan el volumen sin corteza utilizan el d_{cc} como variable independiente, aunque se tenga mayor error, puesto que en el monte es la variable que se puede medir directamente.

$$V_{sc} = a + bd_{cc}$$

Una vez obtenido el volumen sin cortezas, el volumen de cortezas podrá determinarse así:

$$V_{corteza} = V_{cc} - V_{sc}$$

Y finalmente el porcentaje de corteza de un determinado pie se calculará mediante la siguiente expresión:

$$\% \text{ corteza} = \frac{V_{cc} - V_{sc}}{V_{cc}} \times 100$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

HUSCH, B., MILLER, C.I., and BEERS, T. (1982). *Forest Mensuration*. New York (U.S.A.): John Wiley & Sons.

MACKAY, E. (1964). *Dasometría*. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Montes. Madrid.

MITSCHERLICH, G. (1975). *Wald, wachstum and umwelt. 3 band: Boden, Luft und Produktion*. Frankfurt-am-Main: J.D. Sauerländer's Verlag. 352 pp.

PARDÉ, J. & BOUCHON, J. (1961). *Dendrometrie*. École Nationale du Génie Rural des Eaux et Forêts (ENGREF). Nancy.

PRODAN, M. (1951). *Messung der Waldbeständ*. J.D. Sauerländer's Verlag. Frankfurt-am-Main. 259 pp.

YOUNG, H. (1964a). *Untersuchungen über das Gesamtgewicht der Bäume (persönl. Mitteilung. v. 3.3)*

YOUNG, H. (1964b). *Preliminary fresh and dry weight tables for seven tree species in Maine*. Technical Bulletin. Agricultural Experiment Station n° 12

TEMA 6. DIÁMETROS NORMALES Y ÁREAS BASIMÉTRICAS

- I. INTRODUCCIÓN
 - II. ELECCIÓN DE LAS VARIABLES BÁSICAS PARA DESCRIBIR LAS MASAS FORESTALES
 - III. DIÁMETROS DE LA MASA
 - IV. CONCLUSIONES ACERCA DE LA REGULARIDAD E IRREGULARIDAD DE LAS MASAS FORESTALES
 - V. PROBLEMAS EN LA OBTENCIÓN DE LAS DISTRIBUCIÓN DIAMÉTRICAS
 - VI. DIÁMETROS MEDIOS DE MASA
 - VII. ÁREA BASIMÉTRICA
-

6.1. INTRODUCCIÓN

6.1.1. DEFINICIÓN DE DASOMETRÍA O ESTEREOMETRÍA (PITA, 1979)

La *Dasometría* (o *estereometría*) es la disciplina forestal que se ocupa de la medición de las masas forestales, entendiéndose a éstas como el conjunto de árboles de igual o distinta especie, que tienen características comunes y que participan de un ambiente propio, ocupando una determinada extensión de terreno. Al hablar de masa se pierde la individualidad de los árboles, ya que se dan relaciones entre ellos que hacen que la masa se desarrolle de una determinada manera.

6.1.2. DIVISIÓN INVENTARIAL DE LA MASA FORESTAL

Cuando se pretende gestionar un monte con el fin de satisfacer una serie de objetivos (producción, obtención de rentas periódicas, persistencia, regeneración, etc), deberemos dividirlo en determinadas unidades que hagan más fácil dicha gestión. Cada una de estas unidades de gestión debe ser concordante, es decir, albergará dentro un número entero de divisiones de grado inferior. Estas subunidades podemos clasificarlas en unidades dasocráticas y en unidades inventariales (figura 6.1):

- Unidades dasocráticas. Surgen a consecuencia del proceso de ordenación para organizar el monte, por tanto son unidades de gestión. El **cuartel** es la unidad básica de gestión, sus dimensiones varían entre 100-300 ha. Se define en función de la orografía y otros factores tales como especie, calidad, . El cuartel queda definido en un número entero de **tramos**, con diferentes clases de edad de la masa. En algunos métodos de ordenación el tramo pasará a ser el **tranzón** de corta.
- Unidades inventariales. Se localizan a efectos de realizar en ellas el inventario forestal. El **cantón** es la unidad inventarial por excelencia, aunque a veces el tramo también se hace inventarial al contener un número entero de cantones. El cantón suele tener una superficie de entre 10-30 ha, debe ser homogéneo, con calidad de estación única y debe tener límites naturales fácilmente reconocibles. A veces no se puede conseguir tal homogeneidad, debido a que los pies tengan diferentes edades o sean de distinta especie, entonces se harán otras divisiones

dentro del cantón que serán los **rodales**. Los rodales son divisiones transitorias ya que con el tiempo las diferencias de edad se subsanan, o bien una de las especies termina dominando sobre la otra, entonces el rodal habrá desaparecido. Los cantones en cambio deben estar bien definidos y no podrán desaparecer en el tiempo.

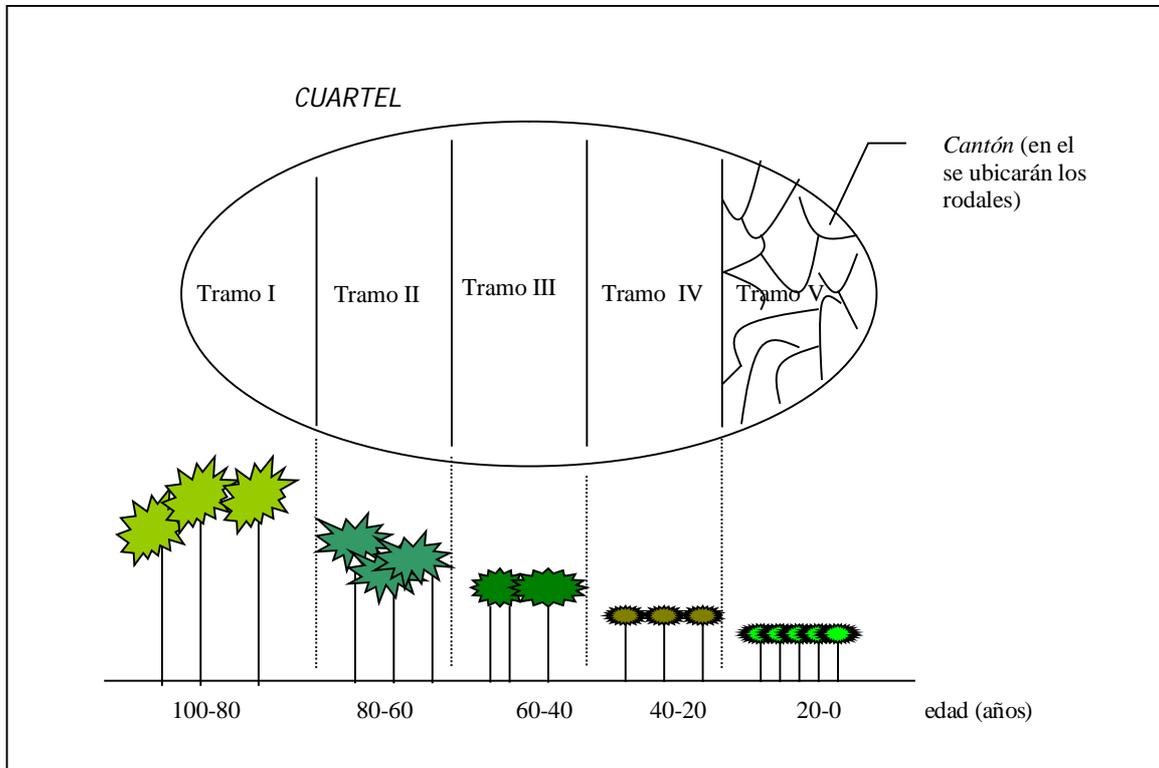


Figura 6.1. Unidades dasocráticas e inventariales

6.1.3. COMPOSICIÓN DE LA MASA FORESTAL

La masa forestal está compuesta por árboles de una ó varias especies, además de otras especies no arbóreas, de las cuales medimos una serie de características (variables o parámetros). El conjunto de árboles posee una variabilidad dimensional consecuencia de distintos factores, sobre todo genéticos (especie), ecológicos y derivados de los tratamientos aplicados en la masas.

Todos estos factores están muy interrelacionados entre sí, ya que los factores ecológicos condicionan la existencia de las especies y éstos además exigirán un determinado tratamiento para que el desarrollo de la masa sea el óptimo. A consecuencia de estos factores, los parámetros medidos en los individuos de la masa presentarán una variabilidad tal que hace necesaria la aplicación de técnicas estadísticas para ser analizadas y comprendidas las relaciones.

Una masa forestal deberá entenderse como un conjunto de individuos a los que se ha medido una serie de variables de estado (dn , g , V , d_{copa} , ht , hf , e_c , etc). Cualquiera de estos parámetros se comportará según una determinada función de distribución que deberá ser analizada, comprendiéndose el comportamiento de los diferentes tipos de masas (estructura del vuelo arbóreo).

6.1.4. ESTRUCTURA DEL VUELO ARBÓREO (ESTRUCTURA DE LA MASA)

Según Hust, Miller and Beers (1982), la **estructura de la masa** es la distribución de las diferentes especies y tamaños del árbol dentro de la masa forestal. La estructura de la masa es el resultado de los factores genéticos (especie), de las condiciones medioambientales (ecología) y de las prácticas de manejo (tratamientos), que afectarán a la misma desde su origen. Todos estos factores dan lugar a una distribución espacial (en planta) y dimensional (en perfil) de los árboles, dando lugar al concepto general de estructura de la masa o **forma de masa**. En principio conviene distinguir de forma general dos tipos de formas de masa en función de si han sido aplicados o no tratamientos culturales:

1. Forma natural de masa: si no interviene en ella el hombre
2. Forma cultural de masa: si ha intervenido o interviene en ella el hombre

Existen otras clasificaciones de formas de masa que atienden a los aspectos del origen y la edad de los pies (tanto las masa naturales como las culturales podrían pertenecer también a las siguientes formas de masa):

1. Forma fundamental de masa. Se realiza en función del origen de los pies:
 - ✓ Monte alto: masa con pies procedentes de semilla (reproducción sexual)
 - ✓ Monte bajo: masa con pies procedentes de brotes de cepa y/o raíz (reproducción asexual)
 - ✓ Monte medio: masa con pies procedentes de ambos tipos de reproducción
2. Forma principal de masa. Se realiza en función de la edad de los pies. Las formas principales de masa aparecen recogidas en las vigentes Instrucciones de Ordenación de Montes Arbolados (I.O.M.A.). Tendremos dos tipos de clases de edad, las naturales y las artificiales, en función de si interviene la edad del arbolado o su forma en la definición:

2.1. Clases naturales de edad. Son función del tamaño y forma del arbolado (viene determinado implícitamente por la edad):

- ✓ *Diseminado*: es el estrato herbáceo, se origina tras la germinación de las semillas
- ✓ *Replado*: desde la anterior clase hasta que comienza la tangencia de copas (es un estrato subarbustivo)
- ✓ *Monte bravo*: desde el anterior hasta que se traban las copas y se produce poda natural de ramas inferiores (estaríamos ante un estrato arbustivo)
- ✓ *Latizal*: desde la anterior clase hasta un $dn < 20$ cm (es un estrato arbóreo)
- ✓ *Fustal*: desde la anterior clase hasta que el $dn \geq 20$ cm (también es un estrato arbóreo, además el de mayor edad)

2.2. Clases artificiales de edad. Vienen definidas por un intervalo de edad en años del arbolado. Este tiempo se fija normalmente como la menor de las siguientes cifras: 20 años ó $\frac{1}{4}T$ (T = turno).

Normalmente el intervalo de tiempo para las clases de edad será igual al denominado *período de regeneración*, que es el tiempo que transcurre desde que una masa (Tramo) se corta hasta que se regenera totalmente bajo condiciones naturales. En función de la edad de los pies existen tres tipos de formas principales de masa:

- ✓ Masa Regular. Todos los pies tienen su origen en un mismo y relativamente corto período de tiempo, como máximo igual a una clase de edad (ya sea natural o artificial). Según el artículo nº 74 de las I.O.M.A tendremos una masa regular cuando el vuelo se halle distribuido por edades en superficies distintas, de tal manera que en cada una de ellas al menos el 90% de los pies pertenezcan a la misma clase de edad.
- ✓ Masa Semirregular. Igual definición que el de masa regular, pero de tal manera que en cada una de las superficies al menos el 90% de los pies sólo pertenezcan a dos clases de edad cíclicamente contiguas.
- ✓ Masa Irregular. Cuando no se cumplen las condiciones fijadas para masa regular o semirregular. En el caso de tener tres clases de edad cíclicamente contiguas tendremos una masa con un primer grado de irregularidad.

Por tanto, el número de clases de edad del arbolado y su distribución en la masa determinará la forma principal de ésta. No obstante el término clase de edad se suele aplicar únicamente a las masas regulares.

De forma general cada forma de masa está relacionada con un determinado tipo de especie y unas condiciones de calidad de estación concretas. Por ejemplo, las masas regulares suelen ser masas monoespecíficas, bastante homogéneas en su composición, en las que se desarrollan fundamentalmente las especies de luz. Por el contrario, las masas irregulares suelen estar compuestas por especies de sombra, no suelen formar masas monoespecíficas y son bastante más heterogéneas que las regulares. Como veremos, cualquier monte podría considerarse como regular con sólo reducir la superficie de las unidades inventariables, puesto que podríamos comprobar que en esa superficie reducida casi todos los pies pertenecerían a una misma clase de edad.

Desde el punto de vista de la gestión, una masa es regular cuando el vuelo del monte se halle distribuido por edades en superficies distintas (Tramos). Para un monte ordenado, en cualquier Tramo tendríamos árboles nacidos en un intervalo de tiempo iguala un periodo de regeneración (por ejemplo 20 años). En un Tramo recién regenerado habrá mucha diferencia en tamaños y formas entre los pies que lo forman (pies de entre 1 a 20 años), pero con el tiempo las

diferencias desaparecerán y finalmente entre pies de 80 y 100 años (Tramo en destino) ya no habrán grandes diferencias entre ellos.

6.2. ELECCIÓN DE LAS VARIABLES BÁSICAS PARA DESCRIBIR LAS MASAS FORESTALES

Cuando se pretende describir una masa desde el punto de vista dasométrico (cuantitativo en general) lo primero que hay que hacer, aparte de decidir el tipo de inventario a realizar, es indicar las variables a medir en los individuos, ya sea en una muestra o en la población total. Ello dependerá de la finalidad del inventario y de la precisión con que deseamos obtener los resultados. Podemos apuntar un orden creciente de detalle para los siguientes inventarios:

- ✓ Inventario a nivel nacional o regional
- ✓ Inventario a nivel monte
- ✓ Inventario a nivel Cuartel o Tramo

Además estas variables elegidas deberán ser fáciles de medir y deberán poder describir los parámetros de interés buscados con la precisión requerida. Normalmente en los inventarios se medirán como mínimo las siguientes variables de la masa:

- ✓ Diámetros normales
- ✓ Alturas (totales, de fuste y al primer verticilo vivo)

El diámetro normal se medirá en todos los pies de las muestras y las alturas en una submuestra de los pies que entraron en el conteo diamétrico. Podría interesar medir otros parámetros en función del nivel del inventario, aunque no siempre se mejoran los resultados y conclusiones finales introduciendo nuevos parámetros. Existe un parámetro deducido, el área basimétrica de la masa, que es el sumatorio de las áreas de las secciones normales de los árboles. Esta variable nos dará información adicional acerca de la densidad y el tamaño del arbolado, por ello convendrá deducirla de las distribuciones diamétricas.

Dicho esto vamos a pasar a analizar el comportamiento de las principales variables de la masa, esto es, los diámetros normales (dn), las alturas (H) y las áreas basimétricas (G).

6.3. DIÁMETROS DE LA MASA

6.3.1. INTRODUCCIÓN

Al hacer el inventario de un cantón lo más exacto sería medir todos los individuos pie a pie. Pero esto no suele ser posible debido a que habría entonces que trabajar con muchos árboles. Por los motivos de ahorrar tiempo y dinero suele medirse solamente una muestra de pies representativa de la masa, aquellos que entran en las parcelas de inventario.

Los árboles medidos en las parcelas son agrupados en clases dimensionales, definidas éstas mediante un intervalo o amplitud diametral. El intervalo de las clases diamétricas suele ser de 5 cm para especies de crecimiento lento o medio y de 2 cm para las de crecimiento rápido.

La marca de clase (valor central del intervalo) debe ser múltiplo de la amplitud diamétrica. Cuando tenemos especies de turnos largos y medios la 1ª clase inventariable suele ser la de 15 cm, y si los turnos son cortos la 1ª clase inventariable será la de 10 cm. Antiguamente, hasta 1930 aproximadamente, la mínima clase inventariable era la de 20 cm (15-25 cm de intervalo).

Así por ejemplo la primera clase diamétrica en un inventario realizado en una masa de *Pinus nigra* (turno largo), englobará a los pies cuyo diámetro esté comprendido entre 12,5-17,5 cm (amplitud 5 cm). Su marca de clase será el valor medio del intervalo, esto es 15 cm. La siguiente clase sería la de 17,5-22,5 cm, y su marca de clase sería 20 cm.

Por el contrario, en una masa de *Populus sp.*, en la que se supone un intervalo de clase de 2 cm, la primera clase quedaría definida para pies con diámetros entre 9–11 cm y su marca de clase será 10 cm.

Conviene dar como valor del diámetro del árbol la media de dos mediciones realizadas en cruz perpendiculares entre sí. Además se deberán contar los pies de la clase no inventariable (en un futuro sí lo serán), que constituirán la masa incorporada en futuros inventarios.

Una vez se hayan tomado los datos de los valores de los diámetros medidos en los individuos de la muestra (o de la población completa) a la que se refiere el inventario realizado (en el monte, o mejor dicho en el cantón), convendría analizarlos mediante los métodos multivariantes. El inventario determinará el número de pies clasificados por especies y por clases diamétricas, con el fin de poder modelizar la distribución diamétrica de frecuencias de pies de la masa.

Modelizar la distribución diamétrica de las masas forestales es importante y nos va a servir, entre otras cosas, como ayuda para proponer la gestión (ordenación) de un monte según unos fines determinados, o para poder predecir el estado de masa que tendremos en el futuro si actuamos de una determinada manera en el presente. También puede servirnos para comparar distintos modelos de masa o de gestión.

La presentación de los resultados de la distribución diamétrica podrá hacerse mediante tabla, de forma numérica, o gráficamente, en los diagramas de frecuencias:

2. Tablas de distribuciones de frecuencias. En estas tablas figurarán como mínimo dos columnas, en la primera de ellas se representan los valores centrales de las clases diamétricas y en la/s otra/s columnas las frecuencias de pies. Las frecuencias diamétricas calculadas podrán ser de dos tipos (tabla 6.1):

- ✓ Frecuencias absolutas (totales o por ha): simples o acumuladas
- ✓ Frecuencias relativas: simples o acumuladas

Diámetros (cm)	Frecuencias absolutas (nº pies totales)	Frecuencias absolutas (nº pies/ha)	Frecuencias absolutas acumuladas (nº pies/ha)	Frecuencias relativas	Frecuencias relativas acumuladas
5	8.000	32	32	0,0884	0,0884
10	15.000	60	92	0,1657	0,2541
15	20.000	80	172	0,2210	0,4751
20	29.500	118	290	0,3260	0,8011
25	15.000	60	350	0,1657	0,9669
30	1.750	7	357	0,0193	0,9862
35	1.250	5	362	0,0138	1
Total	90.500	362	--	1	--

Tabla 6.1. Presentación de resultados en forma de frecuencias absolutas y relativas (simples y acumuladas)

Para el cálculo de existencias se utiliza la tabla de frecuencias absolutas simples por ha, mientras que para modelizar la distribución diamétrica se utilizarán la frecuencias relativas simples y acumuladas.

3. Diagramas de frecuencias. Se representa gráficamente la distribución diamétrica pudiéndose obtener una primera idea de la forma principal de la masa. Los diferentes gráficos que se pueden realizar son los siguientes:
- ✓ Histograma o diagrama de barras
 - ✓ Polígono de frecuencias
 - ✓ Curva de frecuencias (función de densidad)

Los diagramas de frecuencias se representan trasladando sobre los ejes de coordenadas rectangulares, en abscisas las clases diamétricas y en ordenadas el número de árboles por clase diamétrica (frecuencias). Entonces la distribución diamétrica de una masa podría representar una nube de puntos a la que ajustaríamos una función de densidad (figura 6.2):

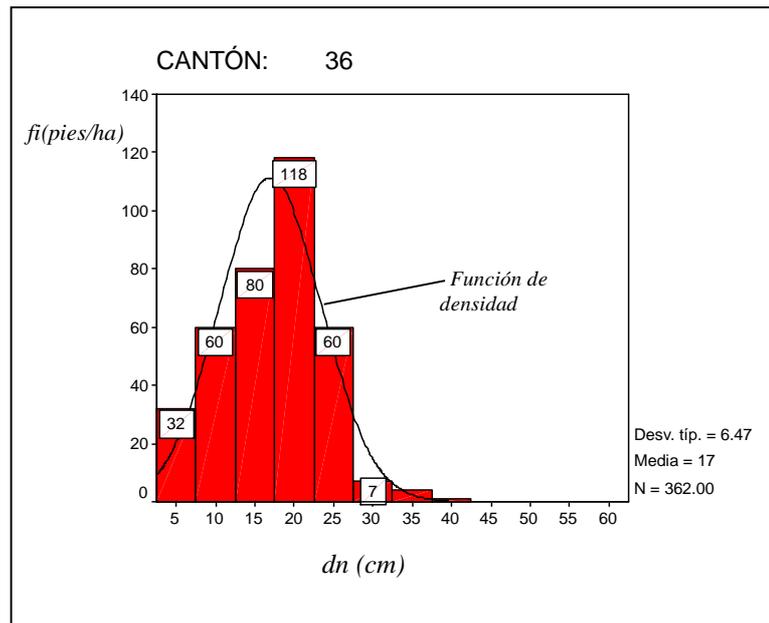


Figura 6.2. Diagrama de frecuencias (histograma) y función de densidad

En efecto, las distribuciones de frecuencias se pueden representar por una función de densidad $f(x)$ que modelará la frecuencias relativas de cada clase diamétrica. El valor de la función de densidad equivale al valor de la probabilidad de encontrar a un pie de una determinado diámetro en el rodal inventariado:

$$f(x) = P(X = x)$$

Para el estudio de las frecuencias relativas acumuladas se empleará la función de distribución, $F(x)$, que representará la probabilidad de encontrar un pie de diámetro menor o igual a la clase considerada. La función de distribución se define como la integral definida de la función de densidad (figura 6.3) y tendrá por expresión:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = P(X \leq x)$$

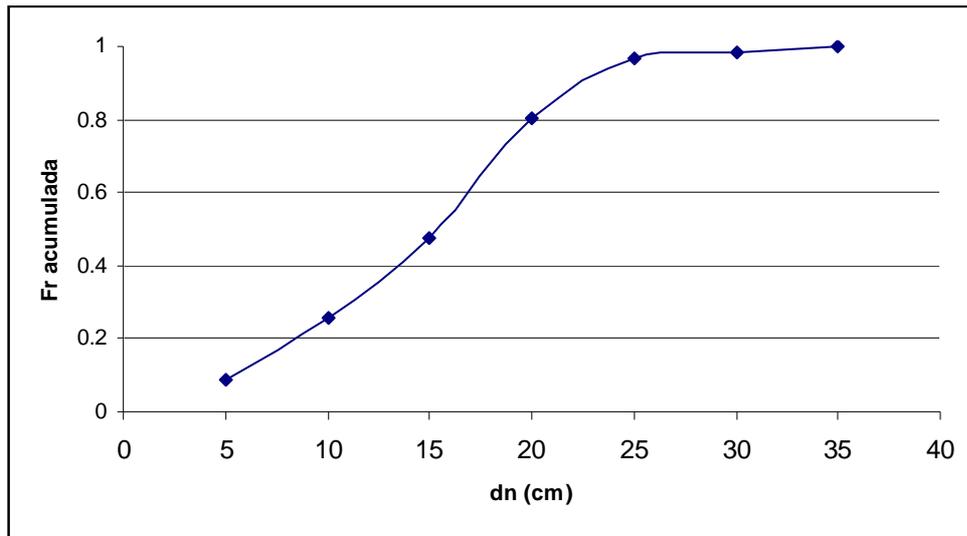


Figura 6.3. Función de distribución

Realizado el análisis de las distribuciones diamétricas derivadas de las diferentes formas principales de masa, se comprueba que existe un comportamiento totalmente diferente en las distribuciones diamétricas de masas regulares o irregulares, sobre todo si estas masas lo son estrictamente, aunque cuando no lo son estas diferencias se atenúan.

A continuación analizaremos el comportamiento de las formas principales de masa, indicando los modelos teóricos a los que se ajustan las distribuciones diamétricas en ambos casos extremos de formas de masa.

6.3.2.COMPORTAMIENTO DIAMÉTRICO DE LAS MASAS ESTRICTAMENTE REGULARES

Como ya dijimos, este tipo de masas las forman individuos de especies de temperamento robusto (necesitan mucha luz para poder regenerarse). Es decir, mientras que en una masa forestal no exista un claro lo suficientemente importante, aunque exista un importante banco de semillas en el suelo éste no dará un repoblado viable en el futuro, puesto que la falta de luz hará morir a éste regenerado.

Normalmente estas masas se regeneran de forma natural tras catástrofes (incendios, plagas) o de forma artificial (cortas a hecho). Una vez se produce el regenerado (diseminado) los pies van creciendo, aumentan de tamaño y tiene lugar la competencia entre individuos que hace que muchos de ellos puedan ser dominados y a la larga morirán, de tal manera que al llegar a la madurez sólo quedarán unos pocos de esa cantidad inicial.

Solamente cuando esta masa adulta se ponga en luz volverá a iniciarse un nuevo ciclo. Si no hay puesta en luz, aunque aparezca un importante diseminado inicial tras las lluvias de primavera, éste fracasará.

Si analizamos el comportamiento de los diámetros de una masa regular en época temprana, como todos los pies han surgido en un corto espacio de tiempo, la

mayoría tienen un mismo diámetro, pocos pies tendrán diámetros grandes y pocos diámetros más pequeños. Por ello se puede decir que la función de densidad de este parámetro es la función de distribución normal.

Conforme los pies van aumentando de edad, las clases pequeñas no gozan de los mismo privilegios que las mayores y van apareciendo asimetrías en la curva, que cada vez con el aumento en edad se hacen más acusadas, pues las clases diamétricas menores ven disminuir sus frecuencias, los mayores crecerán anormalmente (figura 6.4):

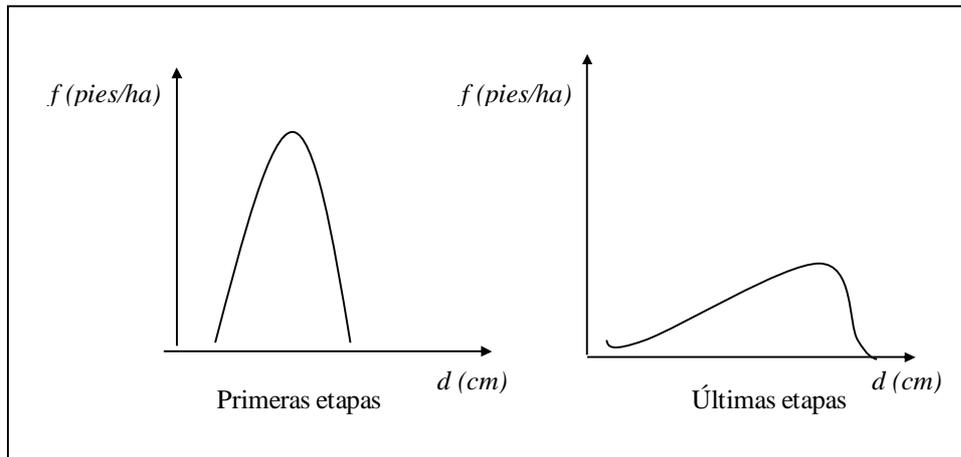


Figura 6.4. Asimetría de la distribución de frecuencias en función de la edad de la masa

Por tanto la curva, conforme aumenta en edad la masa, se irá haciendo cada vez más achatada y más asimétrica, ya que en una misma superficie la cuantía de individuos disminuye conforme aumenta el tamaño de los pies (figura 6.5).

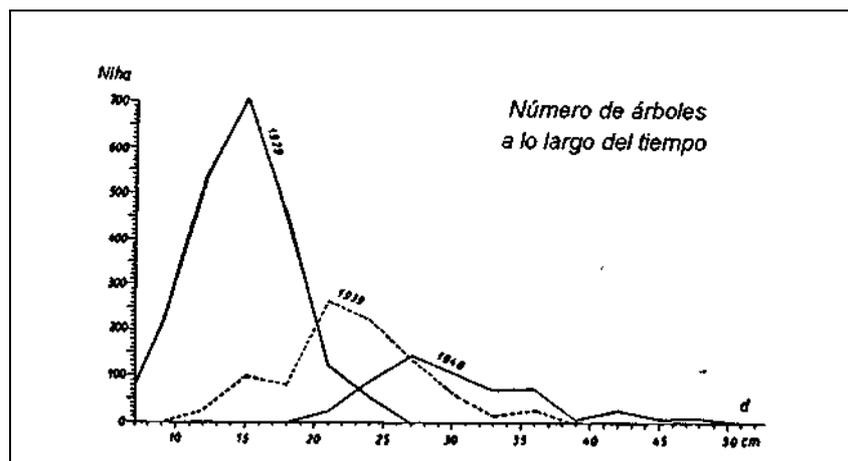


Figura 6.5. Achatamiento de la curva de frecuencias en masa regular (tomado de PRODAN, 1997)

En definitiva, existe una mayor dispersión de datos conforme aumenta la edad de la masa y una mayor asimetría, descendiendo la frecuencia máxima. Como abstracción podemos asimilar la distribución real de una masa regular en un determinado momento a una función de distribución teórica que la modelice.

Veremos las distribuciones teóricas que permiten ajustar las distribuciones diamétricas tomadas de los inventarios.

1. Curva normal o curva de Gauss

Una masa regular de una misma especie y en estación homogénea podría distribuirse en un momento determinado de su desarrollo según la **Ley de Gauss***. La curva normal o de Gauss queda caracterizada por la media y la desviación típica de la distribución y viene definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Siendo:

- $f(x)$: frecuencias relativas
- x : diámetros
- μ : media aritmética de la distribución
- σ : desviación típica de la distribución
- e : base de los logaritmos neperianos

Esta función de densidad expresa las frecuencias relativas (0-1) de los valores diametrales y su forma es la típica en campana, por ello es conocida como campana de Gauss (figura 6.6):

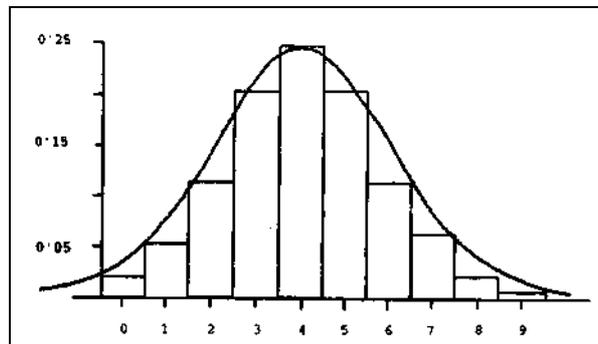


Figura 6.6. Función de distribución de Gauss.
Sobre el eje x, cada número representaría una marca de clase

***CARL FRIEDRICH GAUSS, “el príncipe de las matemáticas”**....cuando el famoso viajero y aficionado a las ciencias barón Alexander von Humboldt preguntó a Laplace quién era el más grande matemático de Alemania, Laplace replicó: “Plaff”. “Y entonces Gauss, ¿qué?”, preguntó el asombrado von Humboldt. “Oh, - dijo Laplace-, Gauss es el mayor matemático del mundo.” Gauss nació en Brunswick (Alemania) en 1777 y murió en Gotinga en 1855. Desde niño demostró una gran habilidad con los números. Los trabajos de Gauss son muchísimos y han tenido y tienen una influencia muy grande en la práctica totalidad de las ramas de la Física y las Matemáticas (Teoría de Números, Geometría Diferencial, Astronomía, Estadísticas, Magnetismo, ...). A lo largo de su vida hizo numerosas aportaciones entre las que destacan: la teoría de los errores, el método general para la resolución de las ecuaciones binomias, la creación de un heliotropo para el envío de señales luminosas en las operaciones geodésicas (operaciones de mediciones terrestres), formuló la teoría general del magnetismo terrestre, definió la Campana de Gauss que es muy utilizada en el cálculo de probabilidades y realizó multitud de experiencias en los campos de la electricidad y del magnetismo

En el estudio de la distribución diamétrica, esta curva se construye representando sobre el eje de abscisas los valores de las marcas de clase y sobre el eje de ordenadas las frecuencias agrupadas por clases. Todos los valores que toma la función estarían bajo la curva, por tanto se podría decir que el área total comprendida entre la curva y el eje de abscisas contiene el 100% de los pies de la masa.

La función de Gauss presenta como puntos característicos los siguientes:

- ✓ 1 Máximo: $\left[\mu, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right]$
- ✓ 2 Puntos de inflexión: $\left[\mu \pm \sigma, \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right) \times e^{-\frac{1}{2}} \right]$
- ✓ Es creciente $\forall x \leq \mu$ y decreciente $\forall x > \mu$

Conocidos μ y σ de una distribución real quedaría definida la función teórica normal correspondiente, en principio sin tener en cuenta la posible asimetría de la función real. Existirían pues infinitas curvas dependiendo de los valores de μ y σ (es posible ajustar una función de densidad distinta para cada combinación de μ y de σ). Además, los valores de μ y de σ influyen en la forma de las curvas (figura 6.7):

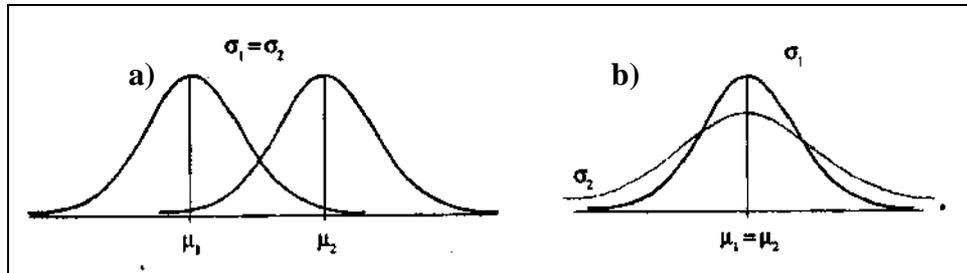


Figura 6.6. Influencia de μ y de σ en la curva de Gauss

- a) Con igual σ , μ desplaza la curva en x
- b) Con igual μ , σ apunta la curva

Según lo explicado el porcentaje de pies cuyos diámetros normales estén comprendidos entre dos valores x_1 y x_2 (marcarían una clase diamétrica), será el área comprendida entre la curva y el eje x acotado en los dos valores anteriores. Ello es la probabilidad de encontrar a un pie con diámetro normal comprendido entre los diámetros x_1 y x_2 (figura 6.8).

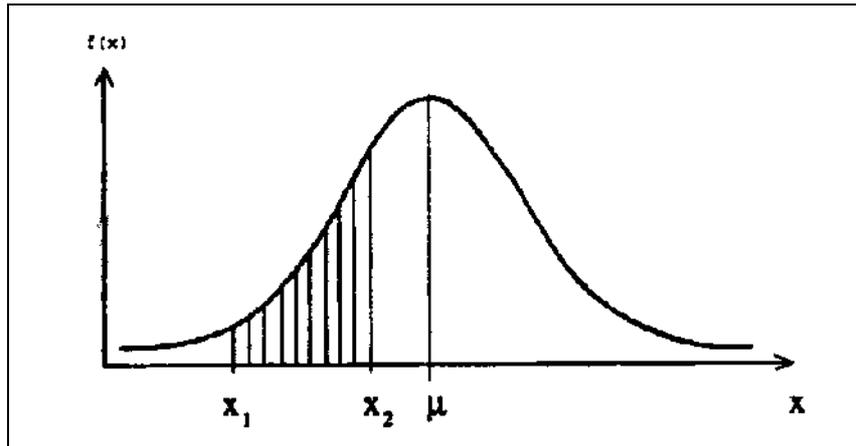


Figura 6.8. Probabilidad mediante la curva de Gauss
El área representada será $P(x_1 < X < x_2)$

El cálculo de dicha probabilidad o área bajo la curva vendrá definido por una función de frecuencias acumuladas, denominada función de distribución, y se calculará como la integral definida de la función de densidad para los dos puntos considerados. La función de frecuencias acumuladas vendrá dada para la curva de Gauss por la siguiente expresión:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Para hacer funcional el cálculo de la función de distribución de frecuencias, los valores de las integrales definidas son tabuladas en función de μ y σ de la distribución. No obstante, necesitaríamos tantas tablas diferentes como combinaciones posibles existiesen entre μ y σ .

Para evitar esto, lo que se hace es tipificar esta función normal mediante un cambio de variables sencillo, que lo que hace es transformar cualquier función de distribución $F(x)$ de media μ y varianza σ en otra nueva, $\Phi(z)$, de $\mu=0$ y $\sigma=1$. La propiedad adicional será ahora que $F(x) = \Phi(z)$, es decir $P(X \leq x) = P(Z \leq z)$.

Tipificaremos la función normal mediante el cambio de variable $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, obteniéndose una nueva distribución, la distribución normal tipificada (figura 6.9):

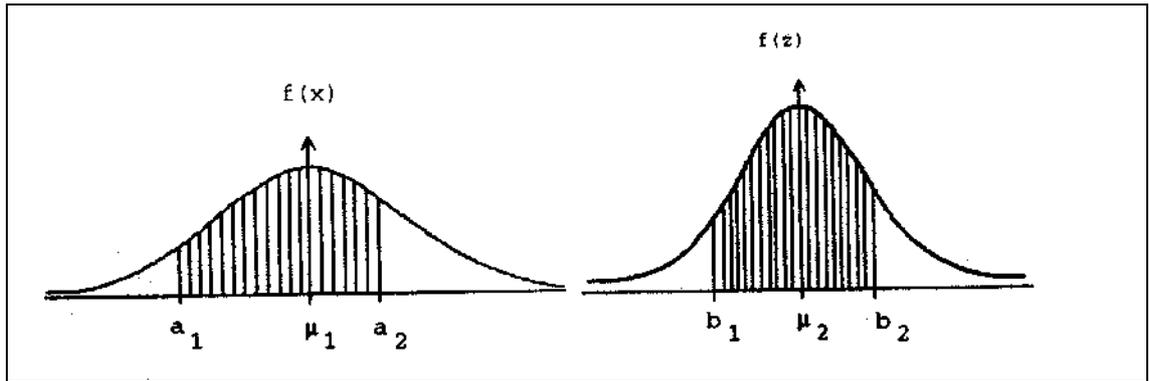


Figura 6.9. Función normal tipificada:
 $x \rightarrow z; f(x) \rightarrow f(z)$

Intentaremos deducir la expresión de la función de distribución para la nueva variable z :

Partiremos para ello primero de la función de distribución normal:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Al tipificar realizamos un cambio de variable: $z = \frac{x-\mu}{\sigma} \rightarrow x = z \times \sigma + \mu$

Ya que $dz = \frac{1}{\sigma} \times dx \rightarrow dx = \sigma \times dz$, entonces:

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{z \times \sigma + \mu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z)^2} \sigma \times dz$$

La función de distribución normal tipificada será:

$$P(X \leq x) = P(Z \leq z) = \Phi(Z) = \int_{-\infty}^{z \times \sigma + \mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z)^2} \times dz$$

Al tipificar $\sigma = 1$ y $\mu = 0$, luego:

$$P(X \leq x) = P(Z \leq z) = \Phi(Z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z)^2} \times dz$$

Y su función de densidad será por definición:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

La función normal tipificada es simétrica respecto al eje de ordenadas, presentará un valor máximo en $x=0$, con ordenada aproximada de 0,4 y un par de puntos de inflexión para $x=-1$ y $x=1$ (figura 6.10):

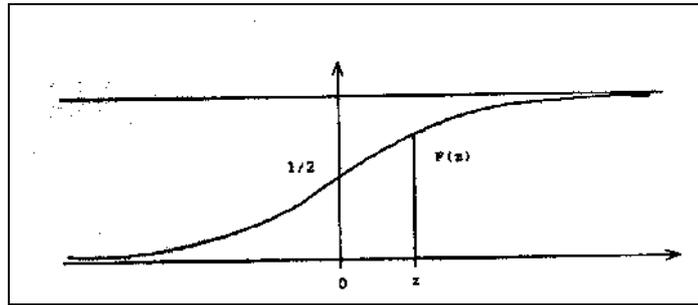


Figura 6.10. Función de distribución tipificada

Tal y como se ha demostrado $P(Z \leq z) = \Phi(Z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z)^2} \times dz$

Esta integral proporciona el área bajo la curva normal tipificada y sobre el eje de abscisas, e indica la probabilidad de que la variable Z tome un valor menor ó igual a z . Los valores de la función $\Phi(Z)$ sí están tabulados puesto que solo existe una combinación posible de μ y σ .

El problema a abordar con la utilización de la función normal y su tipificada sería decidir si una distribución de frecuencias sigue una curva de Gauss. Para ello deberíamos determinar la frecuencia teórica de cada clase diamétrica según la función normal. Esta frecuencia teórica de una clase diamétrica (intervalo comprendido entre x_2 y x_1) en una distribución diamétrica de media μ y desviación típica σ sería:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1)$$

Como los cálculos se realizan en función de la normal tipificada tendremos:

$$P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) = P(Z \leq z_{x_2}) - P(Z \leq z_{x_1}) = \Phi(z_{x_2}) - \Phi(z_{x_1})$$

Siendo los valores de la variable tipificada:

$$z_{x_2} = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$$

$$z_{x_1} = \frac{x_1 - \mu}{\sigma}$$

Una vez determinadas las frecuencias teóricas, se compararían éstas con las reales y podríamos saber el exceso ó déficit de pies por clase diamétrica respecto a una curva normal teórica.

2. Función A de Charlier

Tal y como comentamos en la introducción, la realidad nos muestra curvas normales asimétricas con el paso del tiempo en una masa forestal. Para subsanar en parte el error de considerar a una distribución diamétrica como absolutamente normal, se puede utilizar la función A de Charlier, que tiene en cuenta la asimetría de la función normal con el paso del tiempo.

$$Y = \frac{N}{\sigma} [f(x) + \beta_3 f_3(x) + \beta_4 f_4(x) + \dots]$$

Donde:

β_3 : coeficiente de asimetría

β_4 : coeficiente de curtosis

$f(x)$: densidad normal

$f_3(x)$: derivada tercera de $f(x)$

$f_4(x)$: derivada cuarta de $f(x)$

Y = frecuencia absoluta o relativa

La función A de Charlier es ciertamente poco manejable y práctica debido a la incomodidad de calcular β_3 y β_4 . Además resulta complicado incluir esta distribución en los modelos de crecimiento y tablas de producción, lo que impide dar información sobre la clasificación de productos deducidos de los modelos.

Esto último es importante, pues en los modelos de crecimiento nos interesa conocer previsiones de productos para un futuro, y por tanto es necesario introducir en los ajustes la distribución diamétrica. Si logramos modelizar adecuadamente la distribución diamétrica y las variables de estado de la masa (G, N, H, etc.) podremos hacer una predicción de los productos obtenidos en el monte en función de las dimensiones del arbolado.

3. Función de Weibull

Para incluir la distribución diamétrica en los modelos de crecimiento y producción de la masa forestal es mejor utilizar la denominada función de Weibull (BAILEY *et al.*, 1973). Esta función es muy utilizada en los modelos de producción, además gracias a su flexibilidad permite también representar la simetría o la asimetría de las distribuciones diamétricas supuestamente normales, e incluso como después veremos las de masas irregulares.

La función de densidad de Weibull tiene por expresión la siguiente:

$$f(x) = \frac{c}{b} \times \left(\frac{x-a}{b} \right)^{c-1} \times e^{-\left(\frac{x-a}{b} \right)^c}$$

Donde:

$f(x)$: frecuencia absoluta o relativa

x : diámetro (variable aleatoria continua)

a : parámetro origen (diámetro mínimo)

b : parámetro de escala o tamaño

c. parámetro de forma

El significado gráfico de los parámetros de la función de Weibull es el siguiente (figura 6.11):

1. Para valores de $c \leq 1$ se consiguen curvas continuamente decrecientes
2. Para $1 < c < 3,6$ obtendremos curvas de campana disimétricas a la izquierda
3. Para $c = 3,6$ tendremos la curva normal o campana de Gauss
4. Para $c > 3,6$ la curva será disimétrica a la derecha
5. Para mayores valores de b la curva se desplaza más hacia la derecha del origen

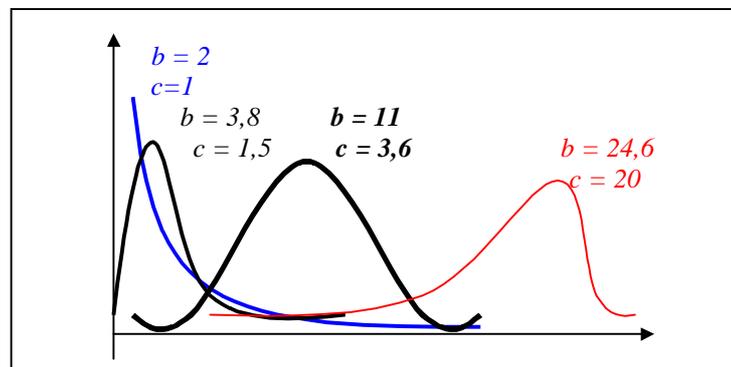


Figura 6.11. Significado gráfico de los parámetros de la función de Weibull (PARDÉ, 1.994)

La función de distribución de Weibull se obtiene integrando su función de densidad y tiene por expresión:

$$F(X) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^x \frac{c}{b} \times \left(\frac{x-a}{b}\right)^{c-1} \times e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^c} dx$$

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^c}$$

ESPINEL *et al.* (1997) analizaron detalladamente la resolución de los parámetros de esta función. Si asumimos que el parámetro de localización a puede ser estimado a través del diámetro mínimo, entonces la función de Weibull se puede reducir a una función de dos parámetros y a fijo. Por otra parte, el segundo momento de la función de Weibull es:

$$E(X^2) = \int_a^{\infty} x^2 f(x) dx = a^2 + 2ab\Gamma\left(1 + \frac{1}{c}\right) + b^2\Gamma\left(1 + \frac{2}{c}\right)$$

Siendo $\Gamma(y)$ la función gamma en el punto y . Si hacemos fijo x_p como un percentil (valor que dejará por debajo de ella un porcentaje determinado de individuos " p ") de la distribución ($0 < p < 1$) podremos determinar el parámetro b a

través de la expresión de la función de distribución. En efecto, cualquier valor de x podrá calcularse de la siguiente manera:

$$1 - F(x) = e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^c}$$

$$\ln(1 - F(x)) = -\left(\frac{x-a}{b}\right)^c$$

$$\left[-\ln(1 - F(x))\right]^{\frac{1}{c}} = \left(\frac{x-a}{b}\right)$$

$$x = a + b\left[-\ln(1 - F(x))^{\frac{1}{c}}\right]$$

Particularizando para el valor del percentil p tendremos la siguiente expresión:

$$x_p = a + b\left[-\ln(1 - p)^{\frac{1}{c}}\right]$$

Por tanto el parámetro b será obtenido de la siguiente expresión:

$$b = \frac{x_p - a}{-\ln(1 - p)^{\frac{1}{c}}}$$

Si sustituimos esta expresión en el valor del segundo momento de la función de Weibull tendremos:

$$a^2 + 2a(x_p - a) \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{c})}{(-\ln(1 - p))^{\frac{1}{c}}} + (x_p - a)^2 \frac{\Gamma(1 + \frac{2}{c})}{(-\ln(1 - p))^{\frac{2}{c}}} - E(X^2) = 0$$

Esta función se puede resolver fijando el parámetro p como un percentil que caracterice la rama derecha de la función de distribución, es decir, un percentil entre 0,85 y 0,95. PASCOA (1987) sugiere utilizar el percentil 0,93:

$$a^2 + 2a(x_{0,93} - a) \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{c})}{(2,65926)^{\frac{1}{c}}} + (x_{0,93} - a)^2 \frac{\Gamma(1 + \frac{2}{c})}{(2,65926)^{\frac{2}{c}}} - E(X^2) = 0$$

Podemos resolver esta ecuación en orden a c y luego calcular b como:

$$b = \frac{x_{0,93} - a}{2,65926^{\frac{1}{c}}}$$

Para ello, es necesario tener un estimador del segundo momento $E(X)^2$. Se puede usar entonces el cuadrado del diámetro del árbol de área basimétrica media (ZARNOCH y DELL, 1985), es decir, el diámetro medio cuadrático (d_g):

$$E(X)^2 = d_g = \frac{G}{\frac{\pi}{4000} N} = \frac{G}{0,00007854N}$$

Los coeficientes a, b y c se pueden calcular también mediante análisis de regresión no lineal, con conocimiento previo del orden de magnitud de los posibles coeficientes que mejor ajustarían la distribución.

6.3.3.COMPORTAMIENTO DIAMÉTRICO DE LAS MASAS ESTRICTAMENTE IRREGULARES

Muchas masas están formadas por una serie continua de clases de edad y por un continuo reclutamiento en las clase diamétricas inferiores debido a la regeneración natural. En este caso cada clase diamétrica tendrá menos dotación de pies que la anterior de la cual se abastece.

Estas masas están formadas mayoritariamente por especies de sombra. La necesidad de sombra para su desarrollo obliga a la no apertura de grandes claros para que pueda conseguirse el regenerado (evidentemente es necesario abrir algo la masa, pues si no exceso en la competencia evitaría el éxito de la pretendida regeneración).

A la muerte de un árbol adulto le sustituye un repoblado importante, el cuál irá evolucionando y disminuyendo su frecuencia (al morir por competencia) de tal manera que a edades maduras vuelve a ser ocupado el lugar dejado por ese árbol por otro árbol adulto. Es decir, hay un equilibrio dinámico entre muerte, corta y reproducción. Todo ello dará lugar a que la distribución diamétrica de frecuencias tenga aspecto de una J invertida (figura 6.12):

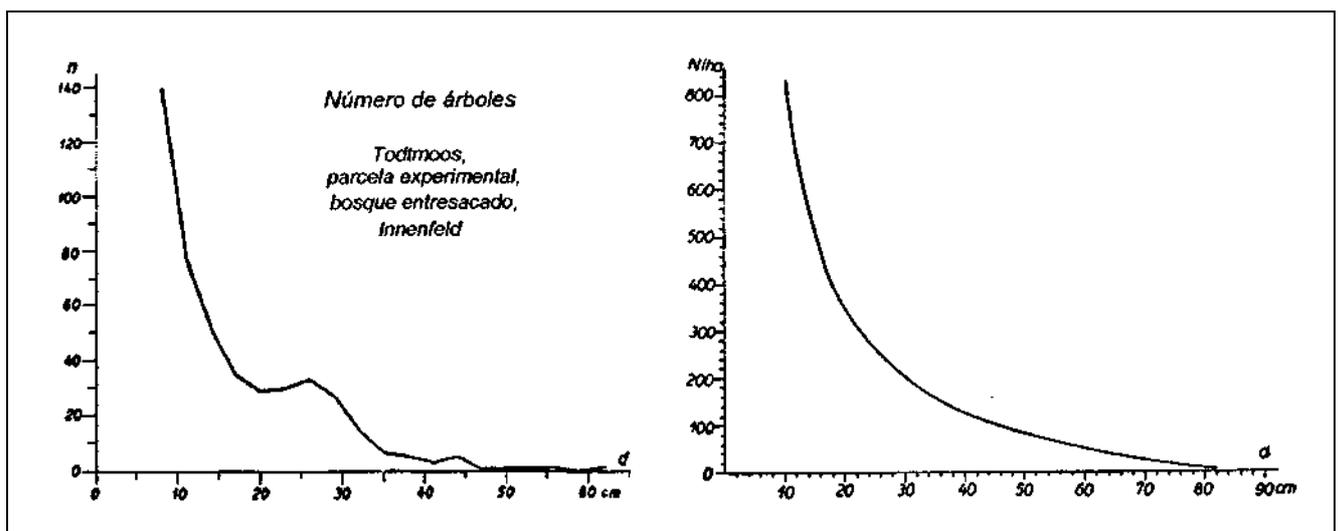


Figura 6.12. Distribución diamétrica en masa irregular (J invertida)
(tomado de PRODAN, 1997)

Se ha comprobado mediante experiencias que esta curva se mantiene constante en el tiempo con ligeras oscilaciones, cosa que no ocurre con las masas regulares. El intentar modelizar esta distribución diamétrica supone elegir un

modelo previo de ajuste. Existen dos criterios que permiten explicar el comportamiento diamétrico de las masas irregulares:

1. Criterio Biológico (o de De Liocourt). La relación entre la frecuencia de 2 clases diamétricas consecutivas (q) es constante, es decir, el ritmo de decrecimiento del número de pies por clase diamétrica, al aumentar ésta, es prácticamente constante
2. Criterio Areal (o de Beranger). El área basimétrica ocupada por cada clase diamétrica es la misma, es decir $G_i = cte$ ($i =$ clase diamétrica)

1. Distribución diamétrica de masas irregulares mediante el criterio biológico de DE LIOCOURT (1898).

La función de densidad correspondiente a este criterio fue formulada por MEYER (1942 y 1957) según la expresión:

$$y = f(x) = a \times e^{-cx}$$

Donde:

- y: frecuencia absoluta
- x: marca de clase diamétrica
- a,c: constantes de la distribución

Esta función no es una función de densidad, ya que x no es una variable continua pues los diámetros están agrupados en clases diamétricas. Se puede demostrar fácilmente que esta función satisface la condición enunciada de que la relación entre frecuencias de dos clases diamétricas consecutivas (q) es constante (figura 6.13).

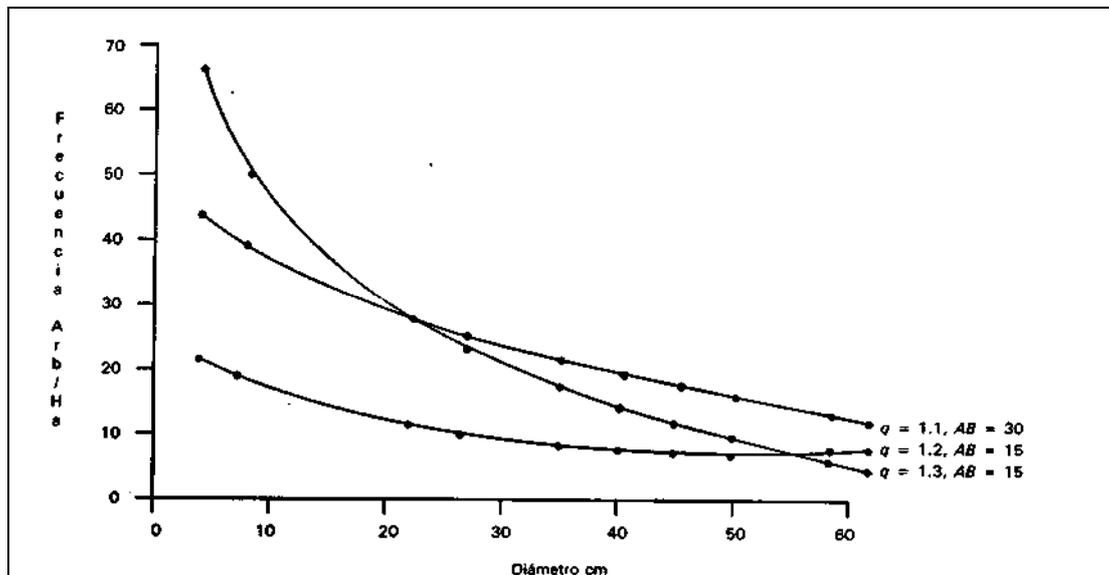


Figura 6.13. Leyes de decrecimiento diamétrico en masa irregular (tomado de BRISEÑO, 1993)

La ley de decrecimiento diamétrico se calculará con

$$q = \frac{y_1}{y_2} = \frac{a \times e^{-cx}}{a \times e^{-c(x+\delta)}} = e^{c\delta} = cte$$

Siendo:

δ : amplitud de clase diamétrica

x : marca de clase

Conocido el valor de \bar{q} (valor medio de la relación entre la frecuencia de pies de todas las clases diamétricas consecutivas) podría obtenerse el valor del parámetro c .

$$c = \frac{\ln \bar{q}}{\delta}$$

El valor del parámetro a podrá obtenerse mediante el siguiente procedimiento:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} a \times e^{-cx_i} dx = \sum_{i=1}^k a \times e^{-cx_i}$$

$$F(x) = a \times \sum_{i=1}^k e^{-cx_i} = N$$

$$a = \frac{N}{\sum_{i=1}^k e^{-cx_i}}$$

Una forma rápida de cálculo de los coeficientes (previa fijación del valor de q) podría realizarse si se conociera el número de pies de la clase diamétrica mayor. Se utiliza esta frecuencia pues es más estable que el número de pies menores (el regenerado es incierto), cumpliéndose entonces la siguiente relación:

$$N_D = a \times e^{-cD}$$

Con:

N_D : número de pies de la clase diamétrica mayor

D : marca de clase de la clase diamétrica mayor

Otro procedimiento de ajuste de la función exponencial negativa puede ser realizado ajustando un modelo de regresión mediante el método de mínimos cuadrados, utilizando la ecuación propuesta $y = a \times e^{cx}$. Esta ecuación puede resolverse linealmente mediante transformación logarítmica:

$$\ln y = \ln a - cx$$

Para cada clase diamétrica obtendríamos un punto de coordenadas $(\ln y, x_i)$ donde x_i sería el diámetro de la marca de clase (d_i). La transformación logarítmica representada en papel semilogarítmico genera una línea recta (figura 6.14):

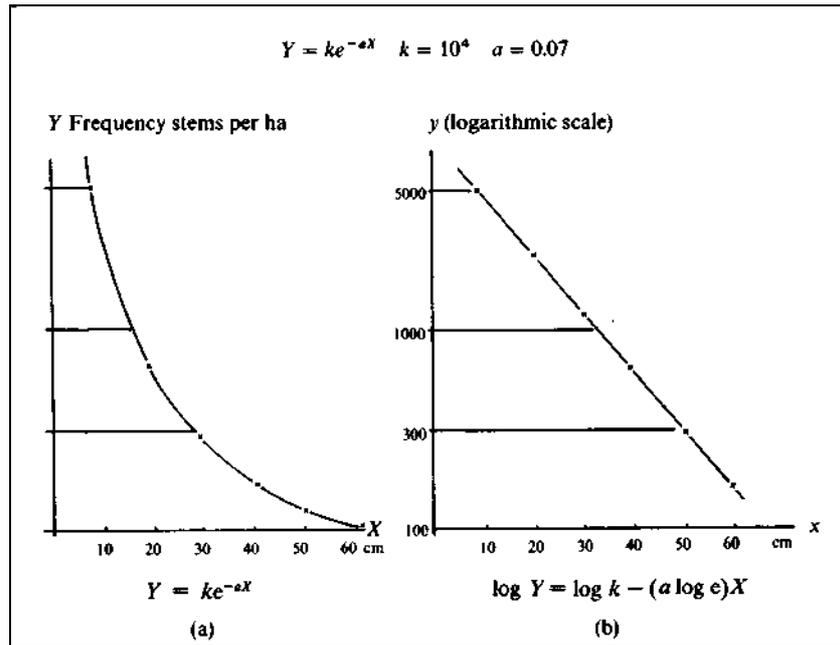


Figura 6.14. Transformación lineal de la exponencial negativa (tomado de PHILIP, 1994)

También podríamos definir la ecuación de esta función de densidad a través de la distribución de Weibull, donde $c=1$.

La función exponencial negativa ha sido usada frecuentemente como un método estándar de comparación de masas naturales o mixtas gestionados en cortas periódicas con regeneración continua bajo el dosel de los pies mayores y por tanto de gran ayuda para el diseño de las cortas en esos lugares. Pero esta función puede ser usada también para predecir el número de pies de todas las especies con diámetros normales mayores a 20 ó 30 cm, pero no es exacta para diámetros menores a 20 cm. Se ha observado como la frecuencia pronosticada para las clases diamétricas inferiores es menor que la frecuencia obtenida realmente. Ello ha sugerido utilizar la distribución diamétrica separadamente utilizando una curva log-normal truncada.

2. Distribución diamétrica en masas irregulares mediante el criterio areal

En su versión primitiva, este criterio de masa está atribuido al profesor italiano Beranger, y consiste en relacionar las clases diamétricas con la extensión superficial ocupada por los pies integrantes de las mismas en masas típicamente irregulares.

Según la hipótesis de Beranger, en una masa irregular la proyección de las copas de cada clase diamétrica ocupa una cabida equivalente, de tal manera que se pueden imaginar tantas superficies iguales como clases diamétricas se consideren.

La relación lineal existente entre las proyecciones de copa y las secciones normales permite la formulación matemática de esta hipótesis. Así, si reemplazamos en la hipótesis de partida las proyecciones de copa por las áreas basimétricas de las clases diamétricas, en cada clase diamétrica de la masa debería existir la misma área

basimétrica. Por tanto, sólo debería variar el número de pies de cada clase diamétrica para mantener G constante por clase y cumplirse así la hipótesis de Beranger.

$$N_i \times \frac{\pi}{4} d_i^2 = N_{i+1} \times \frac{\pi}{4} d_{i+1}^2 = cte = C$$

La fórmula de la ecuación que en este caso liga el número de pies y clases diamétricas vendrá determinada conociendo el área basimétrica que corresponde a ciertas masas irregulares tomadas como prototipos o modelos. En efecto, dado que el área basimétrica es:

$$G = \frac{\pi}{4} \sum_{i=1}^n N_i d_i^2 = n \times C$$

Obtendremos para las distintas frecuencias una ecuación hiperbólica del tipo:

$$N_i = \frac{4G}{\pi n} \times \frac{1}{d_i^2}$$

Agrupando los términos constantes:

$$N = \frac{a}{d_i^2}$$

Siendo $a = \frac{4 \times G}{\pi \times n}$ valor constante en la masa y dependiente del área basimétrica.

Con este método obtendremos el número de pies/ha por clase, según una filosofía de ver la masa irregular absolutamente distinta a la establecida por la ley de Liocourt. Si quisiéramos estudiar la relación entre las frecuencias de dos clases consecutivas tendríamos que existiría un área de distribución de las clases diamétricas igual a:

$$G_n = \frac{G}{n}$$

Para una clase diamétrica determinada, el número de pies teóricos sería:

$$z_i = \frac{G_n}{\frac{\pi}{4} d_i^2}$$

De la misma forma, para la clase inmediata superior tendríamos que:

$$z_{i+1} = \frac{G_n}{\frac{\pi}{4} d_{i+1}^2}$$

Relacionando ambas frecuencias:

$$\frac{z_i}{z_{i+1}} = \frac{\frac{G}{\frac{\pi}{4}d_i^2}}{\frac{G}{\frac{\pi}{4}d_{i+1}^2}}$$

Simplificando:

$$\frac{z_i}{z_{i+1}} = \frac{d_{i+1}^2}{d_i^2}$$

$$\frac{z_i}{z_{i+1}} = \left(\frac{d_{i+1}}{d_i}\right)^2$$

Esta expresión no es constante para todas las clases diamétricas:

$$\frac{z_{10}}{z_{15}} = \left(\frac{15}{10}\right)^2 = 2,25$$

$$\frac{z_{15}}{z_{20}} = \left(\frac{20}{15}\right)^2 = 1,78$$

Además, este cociente se aproxima a 4 para clases diamétricas muy pequeñas y tiende a uno para las clases diamétricas mayores.

6.4. CONCLUSIONES ACERCA DE LA REGULARIDAD E IRREGULARIDAD DE LAS MASAS FORESTALES

En relación a la modelización de las distribuciones diamétricas, una vez definido el modelo (Weibull, Normal, Exponencial negativa...) y comprobada la bondad del ajuste, tendríamos sintetizada toda la información real (distribución diamétrica real) en unos cuantos parámetros (en la Normal (\bar{x}, σ) , en la de Weibull (a, b, c) o en la exponencial (a, b)).

No obstante, la realidad no es tan estricta como lo comentado anteriormente en relación a la modelización de masas regulares e irregulares, presentándose en la naturaleza casos intermedios como norma más común, siendo entonces bastante complicado encontrar una función que se ajuste exactamente a la distribución real.

Además, la propia definición de regularidad e irregularidad pueden presentar ciertos matices. Si pudiéramos dividir un monte irregular en superficies suficientemente pequeñas, podríamos comprobar que este monte presenta características de masa regular. Es decir, una masa irregular no es sino una aglomeración de pequeñas masas regulares.

Hasta tal punto que se acepta actualmente la proposición de que masas forestales formadas por parcelas pequeñas (1-3 ha) regulares pueden considerarse masas irregulares, siempre que en cada parcela se encuentre una clase de edad y estén todas o casi todas las clases de edad posibles distribuidas en las pequeñas parcelas. También podríamos considerar una extensa masa forestal compuesta de masas regulares más pequeñas, en su conjunto la masa sería irregular, cuando en realidad dentro de cada subunidad espacial la masa sería completamente regular. Es el típico caso de un monte ordenado como masa regular (en tramos periódicos por ejemplo), dentro de cada tramo sólo existe una clase de edad y en el conjunto del monte tendríamos todas ellas (figura 6.15):

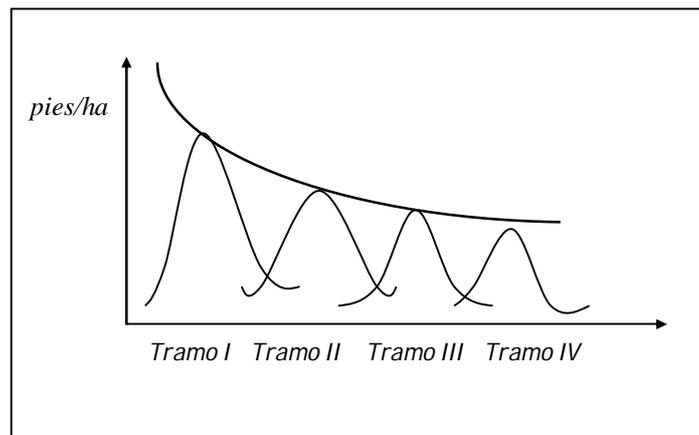


Figura 6.15. Concepto de regularidad por unidades de gestión (Tramos de ordenación)

Por tanto, en los casos en que las masas no son estrictamente regulares ni estrictamente irregulares, un análisis de la distribución no dejaría claro si la masa es regular o irregular. Si deseáramos saberlo en función de la distribución diamétrica, podríamos recurrir al análisis de los siguientes aspectos:

1. La distribución es normal si los coeficientes de asimetría y curtosis varían en ± 2 unidades
2. Mediante la gráfica de dispersión o el histograma de frecuencias podremos orientarnos: en forma aproximada de campana de Gauss es regular y con forma aproximada de *J* invertida irregular
3. Si viéramos que la función no es claramente normal se considerará que esa masa debe ser semirregular o estrictamente irregular
4. Si la función no es normal, ni no normal, consideraremos el estudio con funciones más flexibles, intentando modelizar la distribución diamétrica con las funciones que mejor se adapten a los puntos de la distribución
5. Mediante test estadísticos podremos saber si la distribución se ajusta a algún modelo teórico, no sólo a una curva normal

6.5. PROBLEMAS EN LA OBTENCIÓN DE LAS DISTRIBUCIONES DIAMÉTRICAS

Las distribuciones diamétricas son estimadas mediante muestreo con parcelas de pequeño tamaño (1-9 áreas), por lo que la distribución diamétrica diferirá de la real del rodal si éste se hubiese inventariado por conteo pie a pie (figura 6.16):

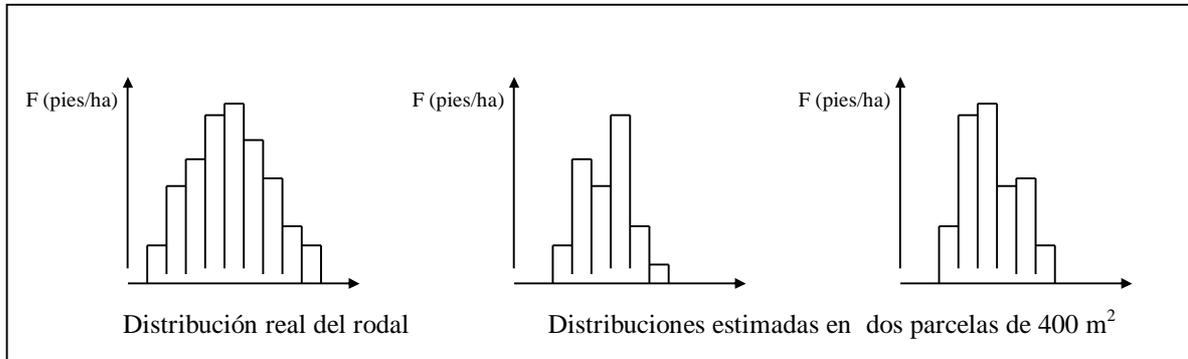


Figura 6.16. Diferencia entre distribuciones diamétricas real y estimadas

Es de esperar que al obtener una distribución media de las obtenidas con cada parcela la distribución resultante se pareciera a la del rodal. Si hubiésemos elegido parcelas menores las distribuciones se asemejarían menos. No obstante el diámetro medio (\bar{d}) y el coeficiente de variación (CV_d) sí que van a ser muy semejantes al del rodal, aunque no se haya obtenido una distribución similar.

La causa de que esto ocurra es la elección de parcelas como muestra para determinar la distribución diamétrica real. Si el árbol es el individuo de interés (es la distribución diamétrica del rodal o del cantón lo que interesa) entonces el procedimiento de selección de árboles mediante parcelas no es estrictamente aleatorio, puesto que aunque se cumple el primer requisito (cualquier árbol tiene la misma probabilidad de ser elegido) no cumple el segundo (cualquier combinación de árboles sobre N debe tener la misma probabilidad de ser elegido).

Al elegir pies de dentro de parcelas obligamos a que vayan siempre juntos un restringido número de pies. Visto de otra manera, la posibilidad de tener dos pies juntos en una parcela depende de la distancia entre ellos, de tal manera que esta probabilidad desciende cuanto más lejos están ($p=0$ cuando distancia entre pies \geq diámetro en la parcela)

El hecho de utilizar parcelas de muestreo con el fin de obtener distribuciones diamétricas, obliga a seleccionar pies con un criterio de proximidad. Pero, ¿por qué son tan diferentes unas parcelas de otras? Se puede argumentar acudiendo al hecho de la autocorrelación potenciado por el efecto del sitio (*site index*) y contrarrestado por el efecto de la competencia. Estos dos efectos tienen distinto peso en función de la edad.

- ✓ Efecto sitio: es lógico pensar que 2 árboles jóvenes, sin competencia importante entre ellos sean muy parecidos entre sí (teniendo misma edad), puesto que las condiciones donde vive son muy semejantes ya que están próximos.

- ✓ **Efecto competencia:** cuando adquieren una cierta edad esos dos árboles empiezan a competir (por la luz, nutrientes y agua), por lo que se establece un hecho que hace disminuir cada vez más su inicial parecido (en parámetros dendrométricos), ya que uno se convertirá en dominante y otro en dominado.

6.6. DIÁMETROS MEDIOS DE MASA

Pese a que lo más exacto para caracterizar la masa es precisamente determinar la distribución diamétrica, a menudo se sustituye a las distribuciones diamétricas por los llamados "diámetros medios de masa", los cuales informan de los valores medios diametrales pero no de su dispersión. Una distribución normal quedaría perfectamente definida añadiendo al diámetro medio (\bar{d}) la desviación típica (σ). Pero las distribuciones no tienen por qué ajustarse siempre a una curva normal, por tanto sólo con el cálculo de \bar{d} y de σ no sería suficiente para caracterizar una masa que no fuera completamente regular.

Sin embargo los diámetros medios son fácilmente calculables a pesar de que no informen totalmente de las características de la masa, pues no podremos saber qué clases diamétricas están dotadas de un mayor número de pies. Son tres los diámetros medios que pueden calcularse a partir de un inventario de datos diamétricos:

1. **Diámetro medio aritmético.** Es la media aritmética de los diámetros de todos los árboles que componen la masa.

- ✓ por clase diamétrica: $\bar{d} = \frac{\sum d_i}{N}$
- ✓ para toda la masa: $\bar{d} = \frac{\sum n_i d_i}{\sum n_i}$

Este diámetro (junto con la desviación típica) es útil en masas regulares pues informa del intervalo dentro del cual se agrupará un determinado porcentaje de individuos. Con este porcentaje de individuos podríamos indicar si estamos en una masa regular.

$$\bar{d} \pm \sigma \rightarrow 68,27\%$$

$$\bar{d} \pm 2\sigma \rightarrow 95,45\%$$

$$\bar{d} \pm 3\sigma \rightarrow 99,73\%$$

2. **Diámetro medio cuadrático.** Es el diámetro de un árbol hipotético que tiene como sección normal el área basimétrica media de un pie de la masa.

Llamando \bar{g} a la sección normal media, ésta podrá obtenerse mediante el área basimétrica de la masa:

$$\bar{g} = \frac{G}{N}$$

$$\bar{g} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\pi}{4} \times d_i^2 \times n_i}{N}$$

$$\bar{g} = \frac{\frac{\pi}{4} \sum_{i=1}^n d_i^2 \times n_i}{\sum_{i=1}^n n_i}$$

En la anterior expresión d_i representará el valor del diámetro medio cuadrático, por tanto al ser su valor único, podrá ser despejado de la siguiente manera:

$$\bar{g} = \frac{\frac{\pi}{4} \times d_g^2 \sum_{i=1}^n n_i}{\sum_{i=1}^n n_i}$$

$$d_g = \sqrt{\frac{4}{\pi} \bar{g}}$$

$$d_g = \sqrt{\frac{4}{\pi} \times \frac{G}{N}}$$

Otra expresión de cálculo del diámetro medio cuadrático es la siguiente:

$$d_g = \sqrt{\frac{4}{\pi} \times \frac{G}{N}} = \sqrt{\frac{4}{\pi} \times \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\pi}{4} n_i \times d_i^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n n_i \times d_i^2}{N}}$$

$$d_g = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n n_i \times d_i^2}{N}}$$

El diámetro medio cuadrático es siempre mayor (a lo sumo igual) que el diámetro medio aritmético y presenta mayor utilidad que aquel como valor representativo de la distribución diamétrica de la masa. Entre diámetro medio aritmético y diámetro medio cuadrático existe una relación en función de la varianza de la distribución diamétrica (σ^2). Esta propiedad puede ser fácilmente demostrada partiendo de la definición de la varianza de la distribución:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n n_i \times (d_i - \bar{d})^2}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n n_i \times d_i^2}{N} - \frac{2 \sum_{i=1}^n n_i \times d_i \times \bar{d}}{N} + \frac{\sum_{i=1}^n n_i \times \bar{d}^2}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n n_i \times d_i^2}{N} - \frac{2\bar{d} \sum_{i=1}^n n_i \times d_i}{N} + \frac{\bar{d} \sum_{i=1}^n n_i}{N}$$

$$\sigma^2 = d_g^2 - 2\bar{d} \times \bar{d} + \bar{d}^2$$

$$\sigma^2 = d_g^2 - \bar{d}^2$$

$$d_g^2 = \sigma^2 + \bar{d}^2$$

$$d_g = \sqrt{\sigma^2 + \bar{d}^2}$$

3. **Árbol de área basimétrica mediana.** Árbol cuya sección normal divide la distribución de las áreas basimétricas de la masa en dos partes iguales. Para calcularlo, se determina la distribución basimétrica de la masa y se busca el valor que deje por arriba y por debajo el mismo n° de datos.

$$g_m = \frac{\pi}{4} d_m^2; \quad d_m = \sqrt{\frac{4g_m}{\pi}}$$

Este d_m es mucho mayor que d_g y \bar{d} pues no está influenciado por las claras que se hacen sobre los pies pequeños, además el área basimétrica aportada por los pies pequeños tiene mucho menos peso que la aportada por los pies mayores.

4. **Diámetro del árbol de volumen medio.** Se calcula el volumen total de la masa y se divide por el n° de pies totales. Este valor es muy parecido al de d_g .

$$\frac{V}{N} = v_m; \quad v_m = a + b d_v^2$$

5. **Árboles medios de Hohenadl.** No tiene utilidad para información real de una masa. Se usa para saber si una masa es regular o no. Si es regular entre los valores extremos marcados por la media y la desviación típica debería quedar el 68% de los casos:

$$d_+ = \bar{d} + \sigma$$

$$d_- = \bar{d} - \sigma$$

6.6. ÁREA BASIMÉTRICA

El área basimétrica se deduce a partir de los diámetros normales de los pies de una masas forestal. Interesa este parámetro pues da una idea de la densidad de la masa, y es un complemento (compendio) del número de pies más pequeños por hectárea y de sus diámetros. Esto es debido a que una masa con muchos pies pequeños puede tener la misma área basimétrica que otra con pocos pies de mayor tamaño.

Por definición el área basimétrica de una masa será el sumatorio de las secciones normales (g_i) de todos los pies que componen esa masa. La distribución diamétrica (n_i) con los árboles agrupados en los centros de las clases diametrales permite el cálculo de las áreas basimétricas por clase diamétrica (G_i) y en el conjunto de la masa (G_{masa}) (tabla 6.3):

Clase diamétrica (cm)	Frecuencias (pies/ha)	$g_i = \frac{\pi}{4} \times d_i^2$	$G_i = g_i \times n_i$
5	n_1	g_1	G_1
10	n_2	g_2	G_2
15	n_3	g_3	G_3
·	·	·	·
·	·	·	·
·	·	·	·
60	n_{13}	g_{13}	G_{13}
			$\sum G_i = G_{masa}$

Tabla 6.3. Cálculo del área basimétrica

El área basimétrica G es un parámetro de gran importancia para caracterizar dasométricamente el rodal, pues nos definirá su densidad y su volumen a la vez. Entre área basimétrica y volumen de la masa existe una estrecha relación:

$$V = G \times H \times F$$

Donde G : área basimétrica (m^2/ha)

H : altura media de la masa

F : coeficiente mórfico de la masa

Esta expresión permite la denominada *cubicación de masas en bloque*. El valor de G sería estimado mediante relascopio de Bitterlich (véase tema específico sobre Dasometría relascópica) y después se calcularía la altura media de la masa, por los procedimientos que para ello se explican más adelante.

Además, se ha observado que el producto $G \times H$ genera un coeficiente específico que varía en función de la especie, la edad y la selvicultura aplicada en la masa.

$$V = F \times (G \times H)$$

$$V = F \times k$$

Agrupada de otra manera la expresión anterior, se puede contemplar ahora al volumen de la masa como:

$$V = G \times (F \times H)$$

Entonces $V = G \times K$, siendo ahora K la altura reducida por el coeficiente mórfico de la masa, y a ello se denomina *altura de forma* (BERNARD, 1956). Ha sido muy frecuente en la literatura forestal encontrar tablas que ofrecían los valores de la altura de forma para una determinada especie, en masa regular. Se extraía el coeficiente en tablas de doble entrada, una entrada era el diámetro y la otra la altura (PARDÉ, 1994).

Otra utilidad del área basimétrica es su gran capacidad de evaluar la densidad de las masas forestales. Es frecuente por ello que en los programas de claras se defina la intensidad de éstas en función del porcentaje de área basimétrica necesaria a extraer de la masa. Y como última gran utilidad del área basimétrica reseñaremos la posibilidad de explicación mediante éste parámetro de la distribución diamétrica en masas irregulares tal y como hemos podido demostrar.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BAILEY, R.L; DELL, T.R. (1973). *Quantifying diameter distributions with the Weibull function*. Forest Science 19: pp. 97-104.
- BERNARD, F. (1956). *Etablissement d'un tarif de cubage: etude statistique; quelques resultats pour le Gabon*. Nogent-Sur Marne: Centre technique forestier tropical. 36 pp.
- BRISEÑO, M. (1993). *Conceptos básicos de manejo forestal*. Noriega Editores. México.
- ESPINEL, S; CANTERO, A. y SAENZ, D. (1997). *Un modelo de simulación para rodales de Pinus radiata en el País Vasco*. Montes nº 48. pp. 34-38.
- LIOCOURT, F. DE (1898). *De l'aménagement des sapiniers*. Bulletin de la Societé forestier de Franche-Comté et des provinces de l'Est, tome IV, pp. 396-409 y pp. 645-646.
- MEYER, H.A. (1942). *Methods of forest growth determination*. Bulletin. Pennsylvania State College, School of Agriculture, nº 435, 93 pp.
- MEYER, H.A. (1953). *Forest Mensuration*. Pennsylvania Valley Publishers Inc. Pennsylvania. 357 pp.
- PARDÉ, J. and BOUCHON, J. (1994). *Dasometría*. Versión española de Dendrométrie. Traducido por Prieto Rodríguez, A. y López Quero, M. Ecoly

Nationale des Eaux et Forêts (ENGREF). Nancy (Francia). Madrid: Edit. Paraninfo.

PITA, P.A. (1979). *Dasometría (Tomos 1, 2 y 3)*. E.U.I.T. Forestal. Madrid.

PHILIP, M. (1994). *Measuring trees and forests*. CAB International. Bristol. UK.

PRODAN, H., PETERS, R., COX, F. y REAL, P. (1997). *Mensura forestal*. Proyecto IICA/GTZ sobre Agricultura, Recursos Naturales y Desarrollo Sostenible. San José, Costa Rica.

ZARNOCH, S. y DELL, T.R. (1985). *An evaluation of percentile and maximum likelihood estimators of Weibull parameters*. For. Sc. 31(1). Pp. 206-268.

TEMA 7. ALTURAS DE MASA

- I. INTRODUCCIÓN. IMPORTANCIA DEL CONOCIMIENTO DE LA ALTURA DE MASA. FACTORES DE LOS QUE DEPENDE
 - II. RELACIÓN ENTRE ALTURAS Y DIÁMETROS: LA CURVA h/d. ESTABILIDAD TEMPORAL DE LAS RELACIONES
 - III. MODELOS PROPUESTOS PARA ESTABLECER LA RELACIÓN ENTRE ALTURAS Y DIÁMETROS. TAMAÑO DE LA MUESTRA. PROCEDIMIENTOS GRÁFICOS Y ANALÍTICOS
 - IV. ALTURAS MEDIAS DE MASA. ALTURA DEL ÁRBOL DE DIÁMETRO MEDIO ARITMÉTICO, ALTURA DEL ÁRBOL DE ÁREA BASIMÉTRICA MEDIA. ALTURA MEDIA DE LOREY
 - V. ALTURAS DOMINANTES DE MASA. DEFINICIONES MATEMÁTICAS (CONCEPTO DASOMÉTRICO Y ESTADÍSTICO) Y DEFINICIÓN BIOLÓGICA
 - VI. INDICE DE SITIO Y CURVAS DE CALIDAD
-

7.1. INTRODUCCIÓN. IMPORTANCIA DEL CONOCIMIENTO DE LAS ALTURAS DE MASA. FACTORES DE LOS QUE DEPENDE

La altura de la masa es una variable muy importante pues es el fiel reflejo del estado de la masa y de la fertilidad del sitio en el que ésta se desarrolla. Más concretamente, la altura de la masa nos ofrece información acerca de los siguientes aspectos relativos al desarrollo del dosel forestal:

1. Es un estimador de la estructura vertical de la masa
2. Sirve para la determinación de los volúmenes maderables
3. Es un estimador de la capacidad productiva o “calidad de estación” de un determinado sitio

Hemos indicado como la altura media de la masa será un indicador de la calidad de estación de la masa; al mejorar la calidad de estación aumenta la altura de la masa. No obstante, como posteriormente veremos, en masas tratadas selvícolamente (sobre todo con claras por lo bajo) el concepto de altura dominante deberá reemplazar al de altura media para una correcta estimación de la calidad del sitio.

De cualquier manera, y en lo que a efectos del cómputo del volumen del bosque se refiere, necesitamos conocer los valores de alturas medias de la masa. Si midiéramos todas las alturas de un monte o unidad inventarial podríamos tener la distribución de las alturas por clases hipsométricas. Esta distribución de alturas (*distribución hipsométrica*) nos informaría de la variación de las diferentes alturas dentro de la masa (figura 7.1):

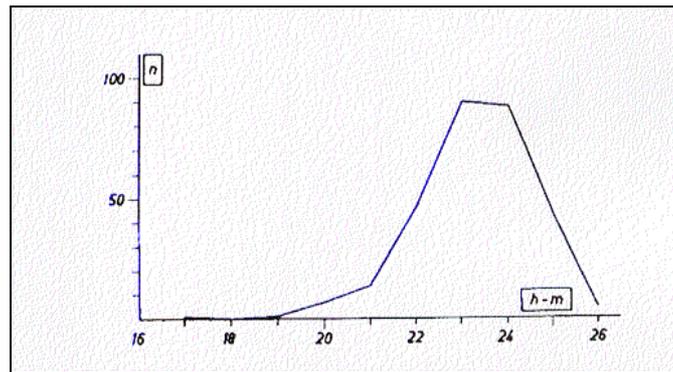


Figura 7.1. Distribución hipsométrica
(tomado de PRODÁN, 1997)

Las distribuciones de alturas normalmente tienden a una curva normal, a veces ligeramente asimétrica. La distribución hipsométrica exacta varía con la especie, calidad de estación y tratamientos aplicados anteriormente en la masa. Con buenas calidades de estación, una masa con especies de sombra y no tratadas selvícolamente, tendrá mayores coeficientes de variación para la distribución hipsométrica que la de un sitio menos fértil, o de especies de luz (existirá mayor rango de clases de alturas).

Si bien la medición de diámetros es sencilla y rápida, la medición de alturas exige más empleo de tiempo y un aparataje algo más sofisticado. Ya que para medir una altura necesitaremos mayor cantidad de medios y de tiempos, sólo se suele medir una muestra suficiente de alturas en los árboles del rodal inventariado.

Ello quiere decir que para el cálculo de alturas medias nos basaremos en la relación existente entre diámetros y alturas, ya que la medición del diámetro es más cómoda. Con los valores altura/diámetro medidos se establecerá una relación estadística mediante análisis de regresión, en donde la altura será la variable dependiente y los diámetros normales la independiente. Cualquier altura, ya sea media por clase diamétrica o de masa, será extraída a través de esta relación. La curva de distribución hipsométrica normalmente no se suele determinar por carecer de aplicación directa.

7.2. RELACIÓN ENTRE ALTURAS Y DIÁMETROS

7.2.1. CONCEPTO DE CURVA h/d

Como ya se comentó, no es necesario medir las alturas de todos los pies que entran en el conteo diamétrico del rodal a inventariar para estimar las alturas medias de la masa. Cualquier altura de masa podrá deducirse mediante la relación existente entre los diámetros y las alturas (relación h/d). El número de individuos que se deben escoger como muestra vendrá dado en función del nivel de detalle con el que se quiera estimar el volumen y los crecimientos.

Normalmente a mayores diámetros normales las alturas también serán mayores. Sin embargo, para la misma clase diamétrica puede haber una gran

oscilación de alturas, debido fundamentalmente al efecto de competencia y densidad existente dentro de la propia masa. Por tanto, la relación entre las alturas y los diámetros es *no estrecha*.

En efecto, la representación en un sistema de ejes coordenados de los pares de valores alturas/diámetros medidos en una muestra de árboles, generará una nube de puntos sobre la que se ajustará una recta (o curva) que indicará la relación (a mayor diámetro, mayor altura) existente entre alturas y diámetros. Esta relación será denominada **relación o curva h/d** (figura 7.2). Esta relación, si bien como ya se ha comentado no es muy estrecha, sí será normalmente muy significativa, sobretodo para una misma especie en condiciones de calidad de estación y espesura homogéneas.

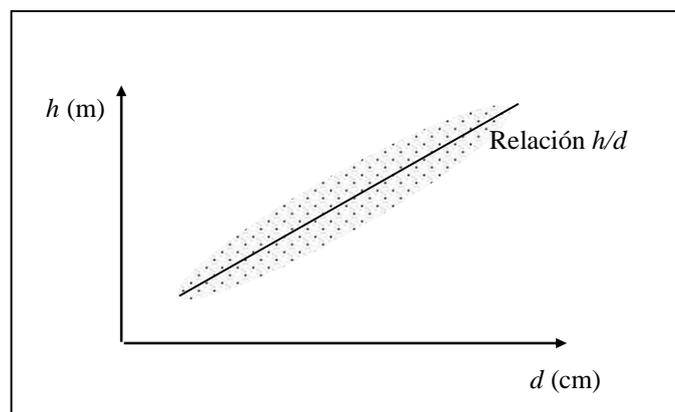


Figura 7.2. Concepto de relación o curva h/d

La distribución de la nube de puntos en los pares de valores nos proporciona una primera idea de la bondad del ajuste y del error estándar que se cometerá en la estimación. A mayor dispersión de la nube de puntos, peor ajuste se tendrá y mayor error en las predicciones de la altura será cometido.

Es importante reseñar que el comportamiento de la nube de puntos en masas regulares e irregulares es totalmente diferente. Así, en una masa regular y a una cierta edad T , en la nube de puntos de la relación h/d habrá poca dispersión, lo que quiere decir que con pocos puntos quedará definida la tendencia de la línea dado la gran homogeneidad de la masa. Mientras, en masas irregulares ocurrirá todo lo contrario, habrá una mayor variabilidad de alturas y por tanto se aumentará la dispersión de los datos.

Lo que se debe pretender en cualquier caso es obtener una relación h/d lo suficientemente precisa, y eso en parte se puede lograr tomando un número adecuado de muestras representativas de la masa. En lo que a la construcción de la relación h/d se refiere, se recomienda tomar el siguiente número de individuos:

- Según Pita (1979), como mínimo se tomarán 100 individuos repartidos entre todas las clases diamétricas en los que se medirá su altura, y como máximo, el 10% de los árboles en los que se ha medido el *diámetro* en la unidad inventarial. En masas regulares podemos reducir la cifra

anterior, en irregulares deberíamos aumentarla por las razones ya expuestas de heterogeneidad hipsométrica.

- 8 – 12 individuos como mínimo, si se consigue con ello definir la tendencia de la nube de puntos, lo cual se podrá realizar solamente en masas regulares. En masas irregulares, debido a la mayor variabilidad de alturas, sería más correcto medir al menos 8 – 10 pies por clase diamétrica.

Debido a que no se usan las muestras para calcular las alturas medias, pues se obtienen de la curva h/d , se debe tomar el mismo número de individuos en cada clase diamétrica como muestra, ya que esta homogeneidad en la toma de datos por clase ofrecerá mejores resultados en el ajuste de la curva.

7.2.2. ESTABILIDAD TEMPORAL DE LAS RELACIONES h/d

Se ha observado que existe un comportamiento claramente distinto en la variación de la curva h/d respecto al tiempo en masas regulares que en irregulares.

En masas irregulares la curva h/d es más o menos estable, es decir, no cambia con el tiempo, debido a la constante competencia entre individuos que la caracteriza. Si tomamos una muestra de pies de cada clase diamétrica y la representamos en una gráfica frente a las alturas, resultará una gran variabilidad pues la competencia hace que a igualdad de diámetro haya distintas alturas. Además, la densidad de una masa irregular es constante puesto que la curva de distribución diamétrica no evoluciona con el tiempo.

En masas regulares la distribución diamétrica va siendo más amplia conforme pasa el tiempo, es decir, evoluciona con el tiempo, desplazándose hacia arriba del eje Y a medida que la masa envejece. Esta variación es fiel reflejo de lo que acontece con la variación temporal de la distribución diamétrica en esta forma de masa (figura 7.3):

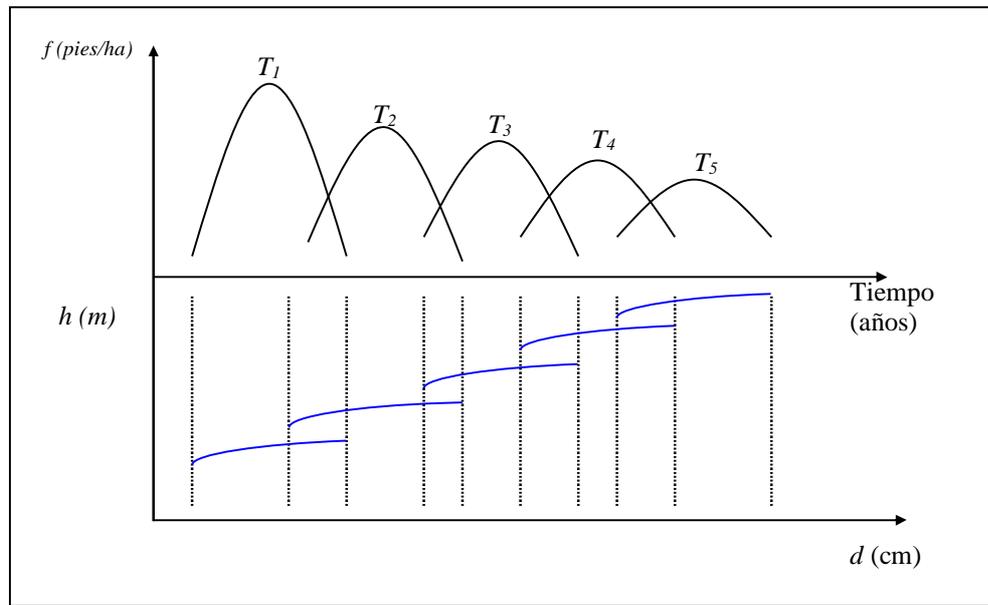


Figura 7.3. Variación temporal de la distribución diamétrica y de la curva h/d en masa regular

Esta variación es debida a que a medida que pasan los años, los árboles de un mismo diámetro (o clase diamétrica) ven aumentar su altura media (figura 7.3). A esto se une que las curvas h/d en masas regulares son menos dispersas que las de masas irregulares, pues hay menor variación diametral.

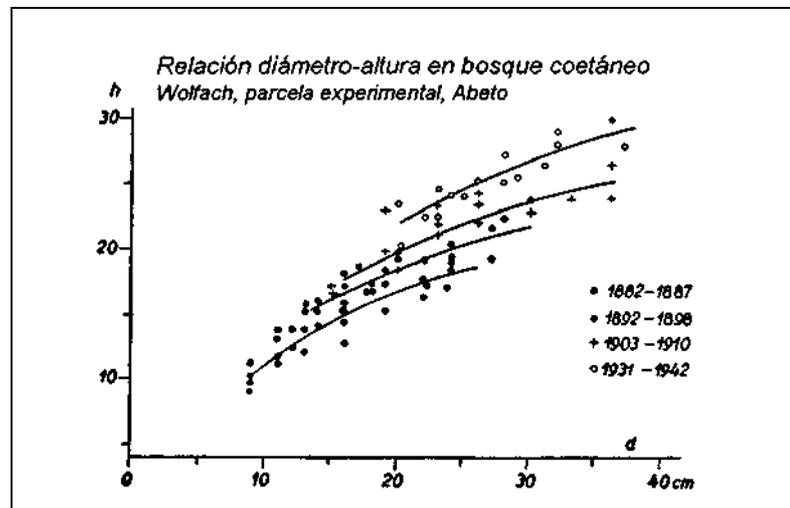


Figura 7.4. Variación de alturas por clase en masa regular coetánea (tomado de PRODAN, 1997)

En resumen, en masas irregulares la curva h/d es significativa y estable en el tiempo pero nos ofrecerá bastante dispersión. La estabilidad de la curva h/d en este tipo de masas puede ser relativa porque esa gran dispersión y es susceptible de moverse hacia arriba o hacia abajo. Aunque para definirla es necesario utilizar mayor número de pies que en masas regulares debido a existir en la masa todo el rango posible de alturas.

7.3. MODELOS PARA ESTABLECER LA RELACIÓN ENTRE ALTURAS Y DIÁMETROS

Cuando se hace un inventario, se miden todos los diámetros de las parcelas y se coge una muestra de alturas para realizar un análisis de regresión y estimar las correspondientes alturas medias, pues estas alturas no se puede calcular a partir del muestreo, ya que la muestra no suele ser proporcional a la distribución hipsométrica de toda la masa.

Es necesario por tanto conocer qué modelos a priori pueden ser más adecuados para el ajuste de estas curvas. En principio, podrían ser válidos los procedimientos gráficos o los analíticos, si bien en los últimos años la facilidad de ajuste de modelos utilizando software de tratamiento de datos ha hecho que desaparezca la utilización de los métodos gráficos, sin embargo algunas veces más racionales que los otros. A continuación se enumeran y explican tanto los procedimientos gráficos como analíticos para la obtención de los ajustes h/d .

1. **Procedimientos Gráficos.** Tiene mayor relevancia su utilización en masas irregulares.

- Gráfico normal. Se elige un sistema de coordenadas sobre el cual se representan los datos obteniendo una nube de puntos, dentro de la cual se traza una línea que deje el mismo número de datos arriba que abajo. Si tenemos los datos agrupados en clases diamétricas (frecuencia, altura media, diámetro medio) a cada punto le corresponderá una clase. Conviene forzar a que la nube de puntos se ajuste a una recta en vez de a una curva. Para ello se hacen transformaciones monologarítmicas y bilogarítmicas.
- Método de Keen-Page. Se trata de un procedimiento semigráfico consistente en representar los datos de la masa en un eje de coordenadas obteniendo la nube de puntos. De la nube de puntos se calcula el centro de masas (M) y se traza una recta vertical paralela al eje de ordenadas que pase por M . Luego se trazarán, tanto en la parte derecha como izquierda a partir de M , las semirrectas que dejen por encima de ellas tantos puntos como por debajo (MA y MB). Después se prolongará la recta MB en BB' . Finalmente, la bisectriz del ángulo AMB' será una buena aproximación de la recta de regresión buscada (figura 7.5):

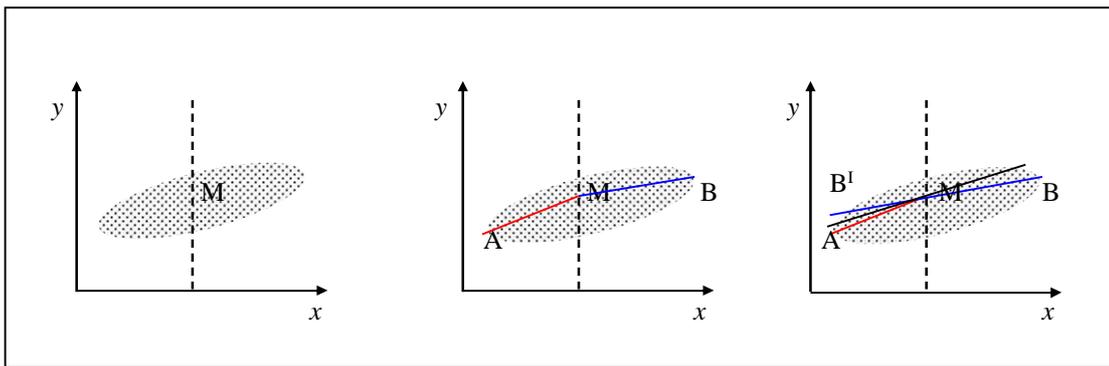


Figura 7.5. Método de Keen-Page para el ajuste geométrico de nubes de puntos

Siendo las coordenadas del centro de masas de la nube de puntos (M):

$$\left(\bar{x} = \frac{\sum x}{N}, \bar{y} = \frac{\sum y}{N} \right)$$

2. Procedimientos analíticos

2.1. Para Masas Regulares

a) Parábola completa de segundo grado:

- $h = a_0 + a_1 d_N + a_2 d_N^2$

b) Modelos lineales:

- $h = a + b d_N$
- $\log h = a + b d_N$
- $h = a_0 + a_1 \ln d_N$

Es necesario tener en cuenta una serie de consideraciones a la hora de elegir el modelo de ajuste, pues habrá que comparar unos con otros hasta elegir aquel que mejor satisfaga la relación. En cuanto al primer modelo descrito (parábola completa de segundo grado), debemos tener en cuenta que conforme se aumenta el grado de la ecuación en el ajuste se incrementa el error estándar cometido, como consecuencia de la colinealidad de las variables, ya que siempre se eleva la misma variable (d_N). Con este ajuste se puede conseguir un modelo muy bueno pero sólo para el entorno de la muestra elegida.

c) Modelo de CURTIS (1967). Establece un modelo para cada clase de edad parametrizando las variables en función de la edad de la masa. Esta ecuación permitirá estudiar la movilidad de la curva h/d con el tiempo, introduciendo la edad como variable adicional.

$$h = (a + b \ln t) + (c + d \ln t) \times \ln d$$

Los parámetros se calculan conociendo varios instantes t:

$$\begin{aligned} a_1 = f(t_1) \text{ y } b_1 = f(t_1) &\Rightarrow h = a_1 + b_1 \ln(d_N) \\ a_2 = f(t_2) \text{ y } b_2 = f(t_2) &\Rightarrow h = a_2 + b_2 \ln(d_N) \end{aligned}$$

Mediante regresión tendremos que:

$$\begin{aligned} a &= e + f \ln(t) \\ b &= g + h \ln(t) \end{aligned}$$

Y finalmente:

$$h = (e + ft) + (g + ht) \ln(d_N)$$

Deshaciendo los cambios de variable:

$$\begin{aligned} e &= a \\ f &= b \\ g &= c \\ h &= d \end{aligned}$$

2.2. Para Masas irregulares

a) Modelo parabólico. Se utiliza la parábola completa de segundo grado:

$$h = a + bd_N + cd_N^2 \quad d_N : \text{diámetro normal}$$

b) Ecuación de Naslund (1947). Se basa en ajustar la curva de alturas mediante un modelo no lineal de la forma (figura 7.6):

$$h = \frac{d^2}{a_0 + a_1 d + a_2 d^2} + 1,30$$

Donde a , b , c y d son las constantes que deben ser calculadas.

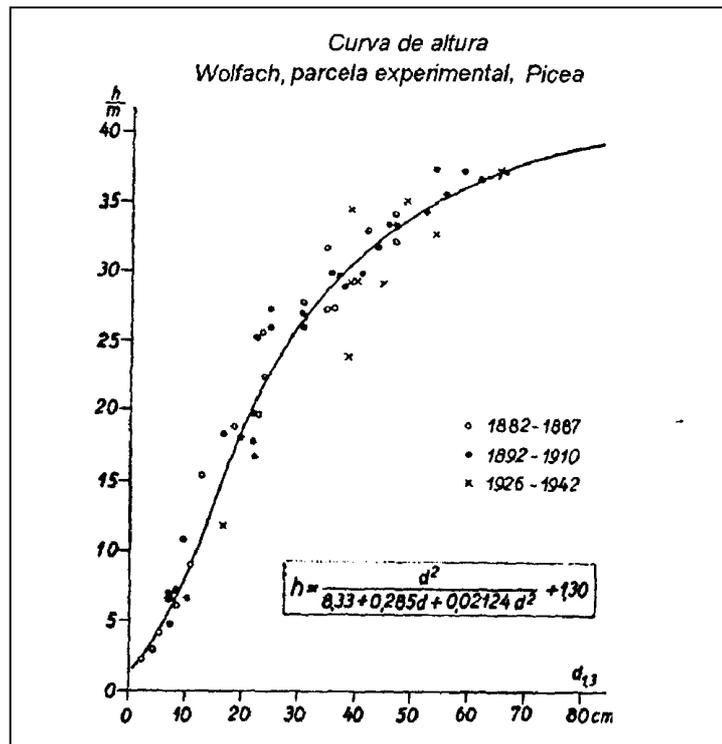


Figura 7.6. Ajuste de la curva h/d mediante el modelo de Naslund (tomado de PRODAN, 1997)

El modelo de alturas de Naslund se puede resolver linealizando la expresión mediante cambio de variable:

$$h - 1,30 = \frac{d^2}{a_0 + a_1d + a_2d^2}; \quad 1^{\text{er}} \text{ cambio } \sqrt{a_0 + a_1d + a_2d^2} = a + bd$$

$$\sqrt{h - 1,30} = \frac{d}{a + bd}$$

$$\frac{d}{h - 1,30} = a + bd \quad 2^{\text{o}} \text{ cambio: } y = \frac{d}{\sqrt{h - 1,30}}$$

$$y = b + cd$$

Esta expresión es lineal y se pueden determinar sus coeficientes b y c mediante regresión. Después deberá deshacerse el cambio de variable:

$$(\sqrt{a_0 + a_1d + a_2d^2})^2 = (a + bd)^2$$

$$a_0 + a_1d + a_2d^2 = a^2 + 2abd + b^2d^2$$

Y deshaciendo el cambio de variable:

$$a_0 = a^2$$

$$a_1 = 2ab$$

$$a_2 = b^2$$

7.4. ALTURAS MEDIAS DE MASA

Ya se ha comentado que la altura de masa es un indicador de la calidad de estación, pues a mayor altura se tendrá una mejor calidad de estación, siempre y cuando tengamos masas naturales (no tratadas selvícolamente). Las alturas medias de masa deberán estimarse en función de parámetros diamétricos, y más concretamente, en función de los diámetros medios de masa.

Hay que indicar que las masas regulares pueden caracterizarse perfectamente en función de las alturas medias, siempre y cuando no hayan sido realizadas claras importantes (en este caso es mejor acudir al cálculo de alturas dominantes). Sin embargo, en masas irregulares no tendrá sentido hablar de altura media, ya que existe una gran variedad hipsométrica en este tipo de masas al existir pies de todas las edades y de todos los diámetros.

Para determinar las alturas de masa se calculan primero los valores diamétricos medios de la masa, y utilizando normalmente la regresión h/d , se obtendrán las alturas deseadas en función de los respectivos diámetros medios que las definen. Las alturas medias de masa más utilizadas son las siguientes:

1. **Altura del árbol de diámetro medio aritmético (\bar{h})**. Se calcula introduciendo el diámetro medio aritmético (\bar{d}) en la ecuación de la curva h/d de la masa.
2. **Altura del árbol de área basimétrica media (h_g)**. Se calcula igual que en el caso anterior, pero introduciendo en la ecuación el diámetro medio cuadrático (d_g). Ésta altura por definición, es algo mayor que \bar{h} . Pita propone otro método para calcular h_g sin necesidad de la curva h/d y sabiendo el d_g . Consiste en buscar en el monte 10 ó 15 pies cuyo diámetro normal sea igual a d_g , se miden sus alturas y la medias de dichas alturas será h_g .
3. **Altura media de Lorey (h_L)**. Se define como la altura media de todos los árboles de la masa ponderada con el área basimétrica (a cada clase diamétrica le corresponderá su área basimétrica media). Esta altura es mayor que cualquiera de las definidas anteriormente:

$$\bar{h}_L = \frac{\sum N_i g_i \bar{h}_i}{\sum N_i g_i} = \frac{\sum G_i \bar{h}_i}{\sum G_i}$$

Siendo g_i el área basimétrica de un pie representativo de la clase diamétrica i

7.5. ALTURAS DOMINANTES DE MASA

Al realizarse las claras se están eliminando los pies del piso inferior lo que afecta al diámetro medio \bar{d} , pues su valor aumenta al eliminar pies con los menores diámetros, aumentando con ello también la altura media de la masa, \bar{h} . Esto no quiere decir que la calidad de estación haya mejorado, por ello para utilizar alturas no sensibles a los tratamientos culturales, se define el concepto de altura dominante como aquella correspondiente a los pies más gruesos y a los cuales no afectarán las claras.

En USA se define la altura dominante como la altura media de los árboles dominantes y/o codominantes. En América del Sur la altura dominante representa las alturas del 40% de los árboles mayores. Según WEISE (1880) sería la altura media del 20% del total de los árboles mayores, conociendo la distribución diamétrica y dividiendo los pies según las clases diamétricas. Actualmente las alturas dominantes se pueden calcular siguiendo criterios matemáticos o biológicos:

1. Definiciones matemáticas de altura dominante

- **Según concepto dasométrico.** KRAMER (1959) la define como la altura media aritmética o cuadrática de los 100 árboles más gruesos por hectárea. En esta definición aparece un problema, y es que los inventarios se realizan por parcelas de muestreo indicando, en cada una, la distribución diamétrica resultante. Esta distribución diamétrica variará de unas parcelas a otras (en función del tamaño de parcela) y los pies que se consideran más gruesos en unas parcelas en otras pueden no serlo. Se produce entonces un sesgo (error) en el cálculo de la altura dominante debido a que los diámetros no están distribuidos de forma homogénea por todo el monte.

Se ha considerado un determinado tamaño de parcela para la elección del nº de pies más gruesos necesarios en el cálculo de la altura dominante, ya que cuanto menor sea la parcela más sesgo tendremos respecto al cálculo de diámetros medios y alturas dominantes. PARDÉ (1994) sugiere para paliar este problema la siguiente regla:

- Cuando la parcela tiene más de 50 áreas se seleccionan el mismo número de individuos que de áreas

Ejemplo: 50 áreas – 50 árboles. $S \geq 50 \rightarrow a = n$

- Cuando la parcela tiene menos de 50 áreas el número de pies será igual al número de áreas menos 1

Ejemplo: 40 áreas – 39 pies. $S < 50 \rightarrow n = a - 1$.

- **Según concepto estadístico.** PETERSON (1955) define la altura dominante como la correspondiente al árbol ficticio de diámetro igual a un diámetro máximo de la distribución diamétrica ($d_{máximo}$). Este diámetro se calculará en función de la desviación típica y de la media de la distribución:

$$d_{máximo} = \bar{d} + 3\sigma$$

Siendo:

\bar{d} : diámetro medio aritmético de la masa
 σ : desviación típica

2. **Definición biológica de la altura dominante.** Es la altura media (aritmética o cuadrática) de los árboles que forman el estrato dominante de la masa. En masas regulares el estrato dominante estaría formado por aquellos pies que reciben radiación por toda su copa, mientras que el estrato dominado sería aquel que recibe radiación difusa o reflejada. Cuesta aplicar con rigor este concepto porque no es objetivo, ya que depende del observador que pretende distinguir los diferentes estratos verticales del dosel.

Un resumen de alturas medias y dominantes, con representación de sus magnitudes *versus* diámetros de la masa puede observarse en la figura 7.7:

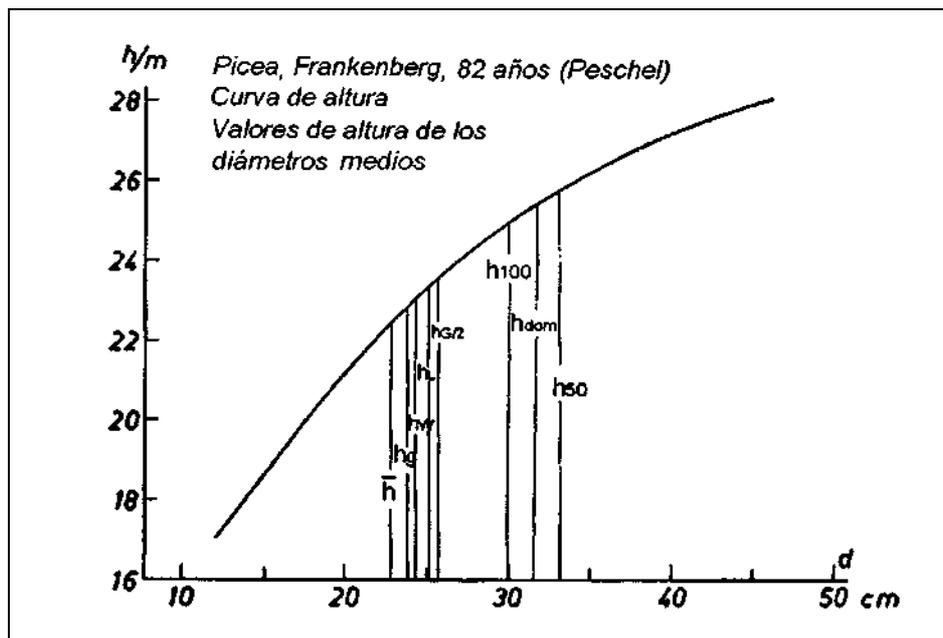


Figura 7.7. Alturas de masa para una parcela experimental de Picea (tomado de PRODAN, 1997)

- \bar{h} : altura media correspondiente al diámetro medio aritmético
- h_g : altura media correspondiente al diámetro medio cuadrático
- h_L : altura media de Lorey
- h : altura media ponderada por G/2
- h_{100} : altura dominante según concepto dasométrico (100 pies más gruesos/ha)
- h_{dom} : altura dominante según concepto estadístico
- h_{50} : altura dominante según concepto dasométrico (50 pies más gruesos/ha)

7.6. INDICE DE SITIO Y CURVAS DE CALIDAD

Como es sabido el diámetro depende de la especie, de la edad y fundamentalmente de la espesura de la masa. A mayor espesura menor diámetro si se mantienen el resto de los factores constantes. Sin embargo, la altura depende a parte de la especie, edad del arbolado espesura, de la calidad de la estación, factor a éste muy sensible.

La calidad de estación representa el grado de potencialidad productiva del monte y engloba todo el conjunto de factores que definen el medio: climáticos, edáficos, fisiográficos, hidrológicos, etc. El estudio de la calidad de estación forestal nos sirve para pronosticar la futura producción en el bosque, y por tanto, es un criterio básico para realizar una correcta gestión forestal. De ahí la importancia de su conocimiento y estimación. En general, la calidad de estación en un determinado monte puede estimarse utilizando dos tipos de métodos:

- ✓ Métodos directos: apeo de árboles y cuantificación real de los crecimientos a través de los pesos secos (biomasas) y los volúmenes del arbolado
- ✓ Métodos indirectos:
 - Extrínsecos a la masa forestal: a través del clima, suelo y vegetación
 - Intrínsecos a la masa forestal: mediante las alturas de la masa y áreas basimétricas

Los métodos de estimación de la calidad de estación por métodos directos son bastante complicados y costosos de llevar a cabo. Por tanto, por motivos de sencillez y facilidad de medición se suelen aplicar los métodos indirectos intrínsecos a la masa, siendo el que mejores resultados ofrece el denominado **índice de sitio**. Se define el índice de sitio como la altura dominante más probable de un rodal alcanzada a una cierta edad (entre 20-50 años para coníferas) que denominaremos *edad típica*, *edad clave* o *edad de referencia* (figura 7.8).

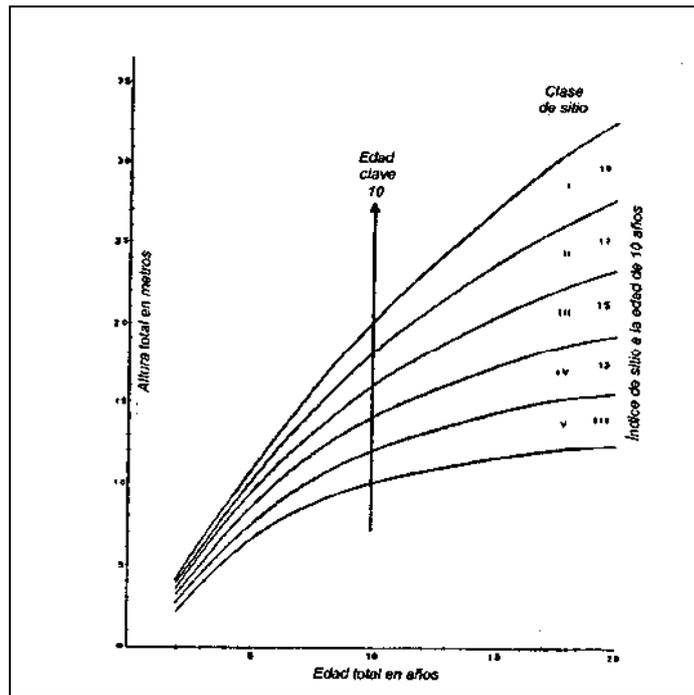


Figura 7.8. Concepto de índice de sitio (edad clave 10 años)
(tomado de PRODAN, 1997)

La idea de considerar la altura como índice de sitio se basa en la ley de EICHORN (1.902), que afirma que la producción total en volumen de una masa de una especie determinada, dentro de una región homogénea climáticamente, es una función de la altura.

En la práctica, el índice de sitio se estimará a través de una **curva de calidad**, esto es, un modelo de crecimiento que ajuste la altura dominante de un rodal con respecto a la edad. La curva de calidad será el modelo de estimación de la calidad de estación para una especie, y se fundamenta en la ley empírica de que para una misma especie, en aquellos sitios donde se obtenga una mayor altura dominante a la misma edad, la productividad forestal será mayor (figura 7.9):

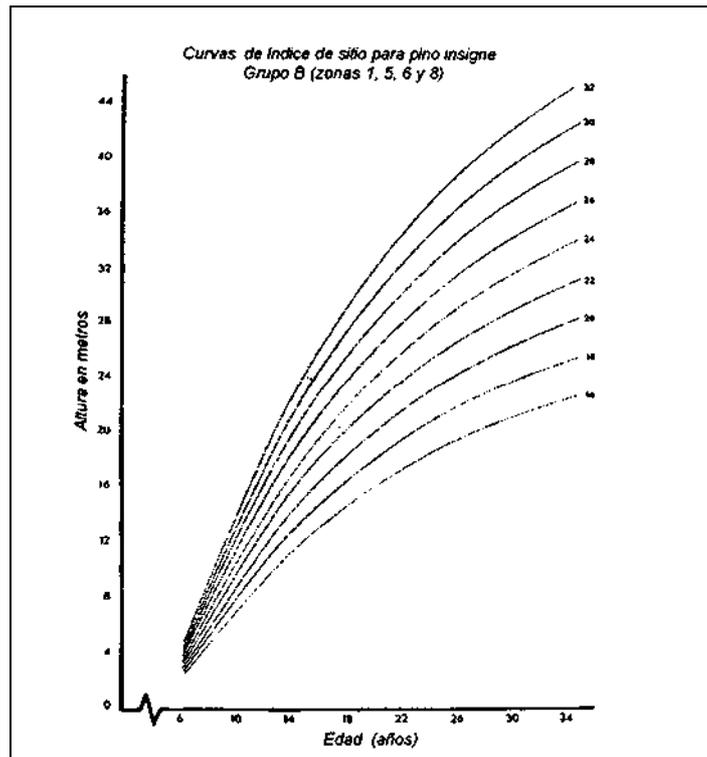


Figura 7.9. Curvas de calidad ó de índice de sitio para *Pinus radiata* (tomado de PRODAN, 1997)

Las ventajas de utilizar la altura dominante como índice de sitio respecto a la altura media son bastante claras. La altura media de la masa es la variable que mejor describe el crecimiento en volumen, pero su valor viene influenciado por condiciones de altas densidades y por las calaras (sobre todo por lo bajo) que aumentan su valor artificialmente. Además se observa como la altura dominante puede ser fácilmente ajustada en función del tiempo utilizando modelos bastante conocidos. En concreto, las ecuaciones de índice de sitio más utilizadas son las siguientes:

- Modelo de KORF(1953): $\ln(h) = a - \left(\frac{b}{t}\right)^c$
- Modelo de SCHUMACHER (1939): $h = e^{a - \left(\frac{b}{t}\right)^c}$
- Modelo de RICHARDS (1959): $h = a \times \left(1 - e^{-bt}\right)^{\frac{1}{c}}$
- Modelo de BAILEY&CLUTTER (1974): $\ln(h) = a + b \left(\frac{1}{t}\right)^c$

La forma general de los modelos de curva de calidad es sigmoideal, en las que se puede apreciar un primer tramo o periodo de juventud, de crecimiento rápido, un segundo periodo de madurez a partir de un punto de inflexión (10-15 años en coníferas) donde el crecimiento empieza a disminuir levemente y un tercer

periodo de senectud, en el que el crecimiento se ralentiza notablemente y se produce la culminación asintótica del modelo.

La idea de expresar el crecimiento de la altura dominante en forma sigmoïdal, está basa en considerar que los árboles, cuanto mayores sean, serán menos eficientes fotosintéticamente y por tanto sus crecimientos irán disminuyendo conforme aumentan en edad, hasta casi detenerse por completo en las edades más avanzadas.

Las funciones de tipo exponencial son las más simples y fáciles de ajustar, pero provocan una tasa de crecimientos excesivamente constante, incluso para edades avanzadas. La función de RICHARDS (1959) presenta la gran ventaja con respecto al resto de modelos de seguir correctamente la caída del crecimiento con el avance del tiempo. CALVO (1994) ha realizado un exhaustivo análisis de esta función siendo el significado de los parámetros el siguiente:

- a: asíntota horizontal
- b: velocidad de crecimiento en altura
- c: punto de inflexión, situado en $y=a(1-c)^{1/c}$; a peores calidades de estación el punto de inflexión se localiza antes

La flexibilidad y el adecuado comportamiento del modelo de Richards no sólo para la altura dominante, sino también para el resto de variables dasométricas, ha llevado a afirmar a algunos autores que este modelo es el "paradigma de la biometría forestal" .

En la práctica se debe obtener una familia de curvas de calidad para cada especie. Para una determinada edad típica de referencia, será de mejor calidad aquella curva cuya altura dominante estimada sea mayor. La familia de curvas de calidad son designadas con números romanos para diferenciar las diferentes calidades. En general se ajustan entre 3-5 calidades de estación para cada especie.

La metodología a seguir para la construcción de las curvas de calidad es la siguiente:

1. Selección de una muestra de pies en parcelas permanentes, temporales o mediante árboles tipo; lo mejor sería realizar un seguimiento de parcelas permanentes mediante mediciones periódicas, para conocer la evolución real tanto en altura media como en dominante de la masa a diferentes edades
2. Estimación de la altura dominante de las muestras
3. Estimación de la edad de las muestras
4. Asignación de pares de valores h/t a cada parcela o árbol tipo
5. Estratificación de las muestras en diferentes calidades. Se podrán emplear métodos estadísticos como el análisis cluster: a mayor dispersión de los datos (h,t) mayor número de calidades tendremos (en general con 3-5 calidades de estación para cada especie será suficiente)

6. Asignación de la edad típica: es normal que esté en el período de madurez, aproximadamente a la mitad del turno
7. Ajuste de los modelos. El ajuste de los modelos se podrá hacer gráficamente o analíticamente
 - Gráficamente:
 - ✓ Método de las fajas o de las curvas límites: se dibujan las curvas superior e inferior de la nube de puntos, el espacio que queda se divide en un número determinado de calidades
 - ✓ Método de la curva guía: se dibuja la curva central a una determinada edad típica (1/2 del turno) que se ajuste al conjunto de la nube de puntos; después se selecciona un número de clases de calidad adecuados y se van trazando las curvas con la misma forma
 - ✓ Método de las curvas naturales: la curva se genera por unión de los pares h/t para todos los árboles dentro de una misma calidad (ninguna curva depende de los datos de otra de calidad diferente). Es típico del ajuste de análisis de troncos para árboles tipo. Huber fue el pionero en la construcción de estas curvas
 - Numéricamente (empleo de ordenadores y software de tratamiento de datos):
 - ✓ Método de la curva guía: se ajusta mediante regresión una curva central y se determina el resto mediante relación lineal de coeficientes; cuando tengamos la curva media poblacional a continuación se traza la familia de curvas completa multiplicando los valores de dicha curva media.
 - ✓ Ajuste individual: se ajustan curvas individuales a cada parcela de toma de datos (el ajuste se realiza mediante mínimos cuadrados). Después se estiman los parámetros de la curva global por separado de la siguiente manera:
 - mediante media ponderada de los valores obtenidos
 - mediante predicción de los parámetros: se realiza una regresión entre el índice de sitio de cada parcela y los estimadores de los parámetros obtenidos en dichas parcelas (a , b y c). Una vez elegido el modelo se sustituyen las relaciones anteriores en la ecuación de crecimiento original y se ajusta una regresión múltiple
 - ✓ Método del máximo y del mínimo: se ajustan las calidades extremas y se determinan las intermedias por relación lineal entre coeficientes. Este método requiere un número suficiente de observaciones en todas las clases de edad; para clase de edad se calcula el valor medio, máximo y mínimo de h_0 , ajustándose tres regresiones diferentes para cada conjunto

de observaciones. Los coeficientes obtenidos se armonizan para ajustar una única curva

- ✓ Derivadas: la altura dominante se obtiene mediante una ecuación diferencial en función del tiempo

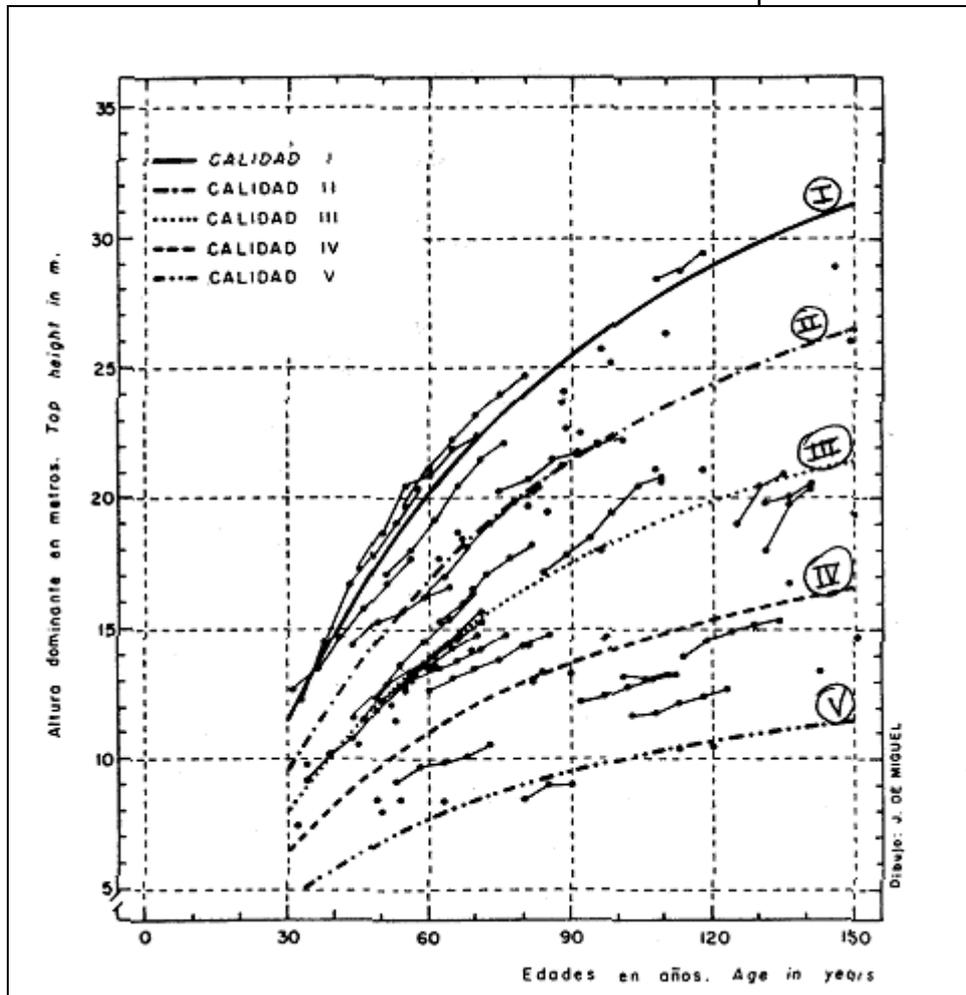


Figura 7.10. Construcción de una familia de curvas de calidad.

Los trazos continuos corresponden a datos en parcelas permanentes, mientras que los puntos se corresponden con valores h/t tomados en parcelas temporales. Para el ajuste, se trazó una curva límite de calidad y el espacio que queda por debajo fue dividido en 4 calidades, siendo ajustadas otras tantas curvas de calidad (sin cita)

- Validación de los modelos: se puede hacer mediante el análisis de troncos de árboles dominantes utilizando técnicas dendrocronológicas (figura 7.11):

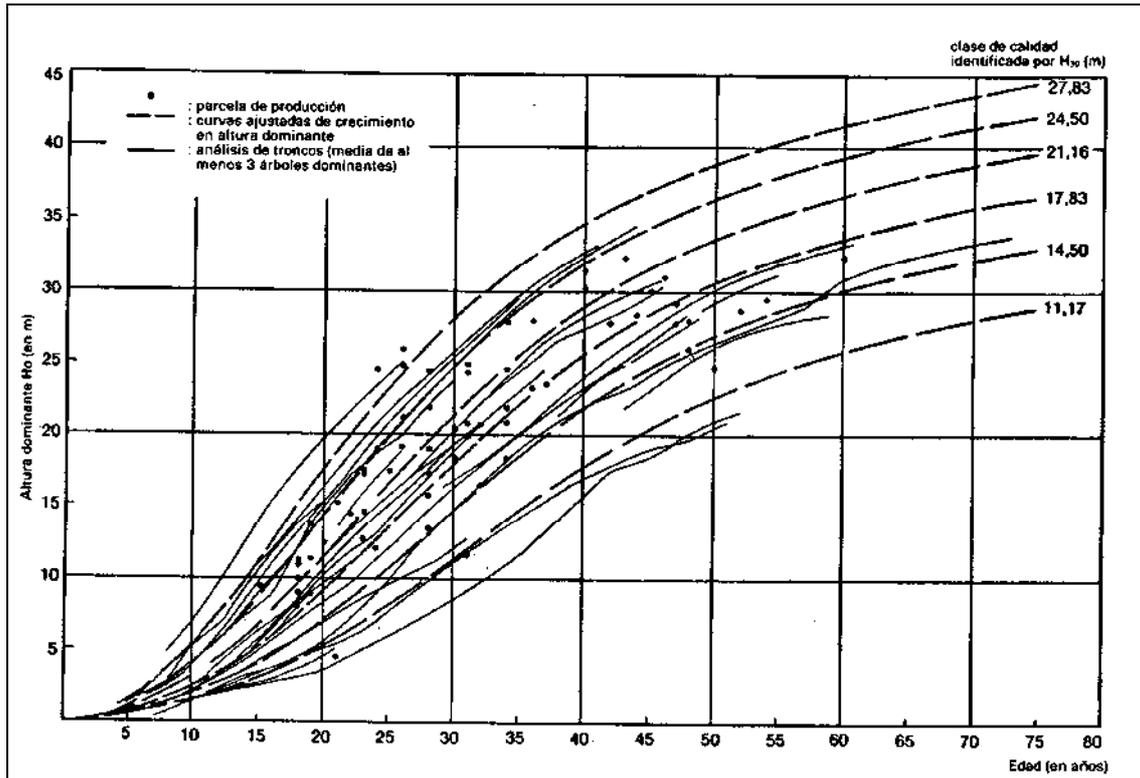


Figura 7.11. Construcción de curvas de calidad mediante parcelas temporales y validación mediante análisis de troncos en árboles tipo (sin cita)

La filosofía del empleo de las curvas de calidad radica en suponer que solamente un parámetro que define los modelos varía en función de la calidad de estación. Por tanto utilizando un curva guía o unas curvas límite, el resto de curvas se pueden construir modificando los coeficientes estimados en las primeras (figura 7.12).

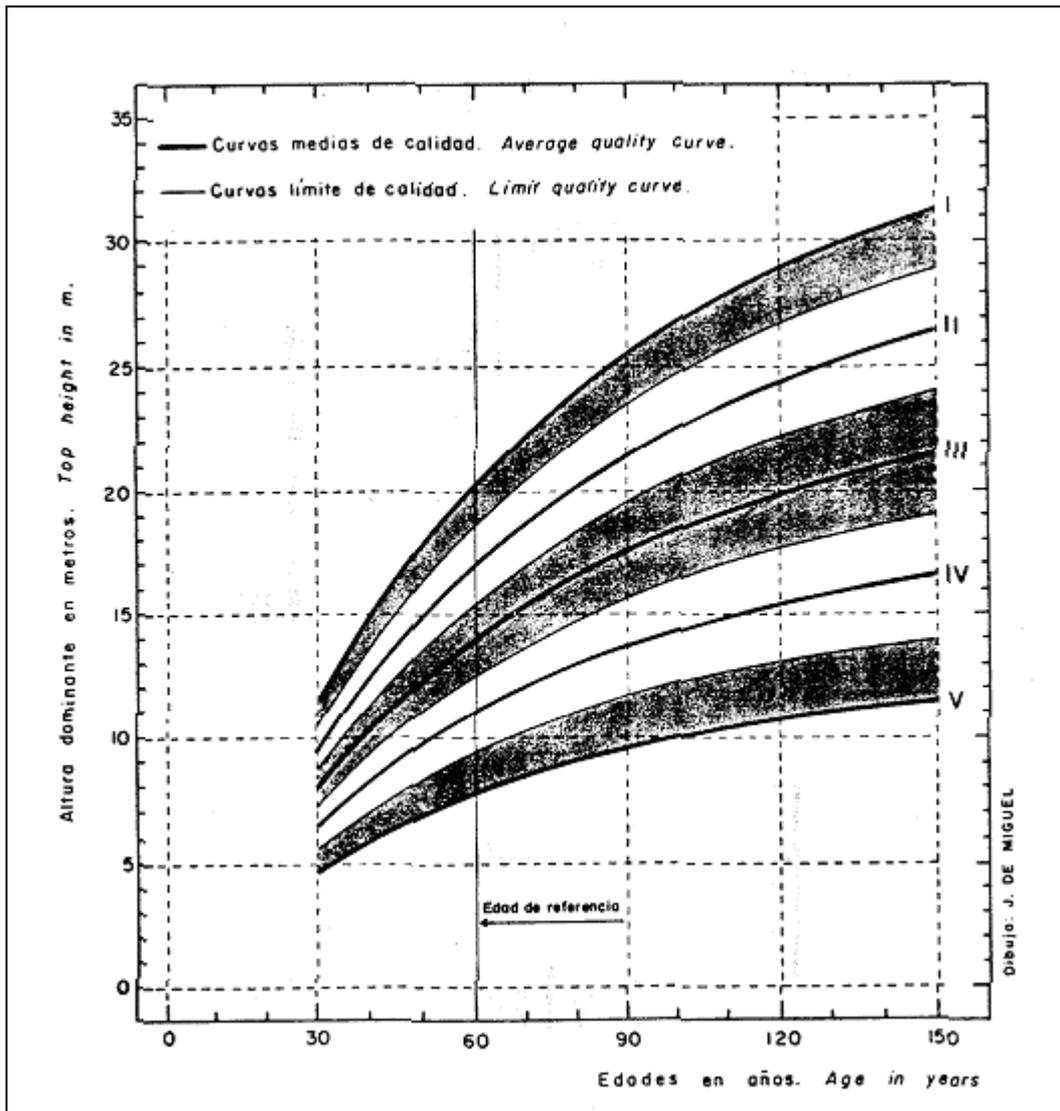


Figura 7.12. Curvas medias y curvas límite en el ajuste de las curvas de calidad (sin cita)

Ello dará origen a dos grandes grupos de familias de curvas de calidad:

1. Si suponemos que el parámetro a depende de la calidad de estación, y b y c permanecen constantes, obtendremos una familia de curvas anamórficas (cambia la escala pero no la forma). En esta familia de curvas se mantiene una proporción entre la altura de una de las curvas a una determinada edad frente a la altura calidad a esa misma edad. Son las más utilizadas y las construidas en España son anamórficas
2. Si suponemos que b depende de la calidad de estación y a y c permanecen constantes, obtendremos una familia de curvas polimórficas (cambia la forma de la familia de las curvas).

El construir una familia de curvas anamórficas equivale a afirmar que la calidad media en las parcelas observadas es la misma para todas las clases de edad

y todas ellas muestran la misma forma, lo cuál no es cierto para muchas especies, pues la sigmoide suele ser más pronunciada en las mejores calidades.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BAILEY, R.L. y CLUTTER, J.L. (1974). *Base-age invariant polymorphic site curves*. Forest Sciences, 20(2): 155-159
- CALVO, R; GONZALEZ ANDUJAR, J.L; PEREZ BOADAS, S. (1994). *Manual de modelos no lineales en los ámbitos agronómico, ganadero y forestal*. INIA-MAPA. 110 pp.
- CURTIS, R.O. (1967). *Height diameter and height- diameter-age ecuations for second growth Douglas fire*. For. Sc. 13(4): pp 365-375
- EICHHORN, F. (1902). *Ertragstafel für die Weißtanne*. Berlín
- KORF, V. (1953). *Dendrometrie*. Statni zemedelske nakladatelstvi. Praha
- KRAMER, H. (1959). Die Oberhöhe als bestandesmerkmal. Allgemeine Forst-und Jagdzeitung, nº 10, pp 241-255
- MACKAY, E. (1964). *Dasometría*. E.T.S.I. Montes. Madrid
- NASLUND, M. (1947). *Funktioner och tabeller for kubering av staende trad, grar och bjok i sodra Sverige*. Meddelanden fran statens Skogsforskningsinstitut, Stockholm, tome 36, pp 1-81.
- PARDE, J. and BOUCHON, J. (1994). *Dasometría*. Versión española de Dendrométrie. Traducido por Prieto Rodríguez, A. y López Quero, M. Ecoly Nationale des Eaux et Forêts (ENGREF). Nancy (Francia). Madrid: Edit. Paraninfo.
- PASCOA, F. (1987). *Estructura, crecimiento e producao em povoamentos de pinheiro bravo. Um modelo de simulacao*. Tesis Doctoral. Universidade Técnica de Lisboa.
- PETTERSON, H. (1955). *Barrskogens volum production*. Meddelanden fran Statens Skogsforskningsintitut, tome 45, 391 pp.
- PITA, P.A. (1979). *Dasometría (Tomos 1, 2 y 3)*. E.U.I.T. Forestal. Madrid.
- PRIETO, A. (1998). *Gestión de masas de Pinus radiata en Guipúzcoa*. Cuadernos de la Sociedad Española de Ciencias Forestales, nº 6. II Reunión sobre Ordenación de Montes.

PRODAN, H., PETERS, R., COX, F. y REAL, P. (1997). *Mensura forestal*. Proyecto IICA/GTZ sobre Agricultura, Recursos Naturales y Desarrollo Sostenible. San José, Costa Rica

RICHARDS, F.J. (1959). *A flexible growth function for empirical use*. Journal For. 37: pp 819-820

SCHUMACHER, F.X. (1939). *A new growth curve and its application to timber yield studies*. Journal Exp. Bot. 10 (29): pp 290-300

WEISE W. (1880). *Ertragstafeln für kiefer*. J. Springer. 156 p.

ZARNOCH, S. & DELL, T.R. (1985). *An evaluation of percentile and maximum likelihood estimators of Weibull parameters*. For. Scir. 31(1):260-268

TEMA 8. VOLUMEN DE LA MASA FORESTAL. TARIFAS Y TABLAS DE CUBICACIÓN

- I. INTRODUCCIÓN
 - II. CUANTIFICACIÓN DEL VOLUMEN DE LA MASA FORESTAL. DEFINICIÓN DE TARIFAS Y TABLAS DE CUBICACIÓN
 - III. PROCEDIMIENTOS PARA CONSTRUIR TARIFAS Y TABLAS DE CUBICACIÓN. ELECCIÓN Y TAMAÑO DE LA MUESTRA, PROCEDIMIENTOS DE CONSTRUCCIÓN
 - IV. PRECISIÓN DE TARIFAS Y TABLAS DE CUBICACIÓN
 - V. LÍMITES DE VALIDEZ EN TARIFAS Y TABLAS DE CUBICACIÓN
-

8.1. INTRODUCCIÓN

Ya vimos en temas anteriores como era posible calcular el volumen para árboles individuales. Igual que a cada árbol le corresponde un volumen unitario, al conjunto de árboles que pueblan un determinado monte (masa forestal) también deberemos asignarle un determinado volumen.

La masa forestal, entendida como un conjunto de pies individualizados, deberá también cubicarse, ya sea a nivel de rodal, de agrupación de rodales (cantón) y al nivel de tramo y monte, con el fin de conocer las existencias, esto es, la productividad del sitio.

Existen distintos enfoques para considerar el cálculo del volumen maderable de una masa forestal. Así, el vuelo podrá considerarse como una población discreta en la que la unidad mínima será el árbol, o bien se podrá considerar como un conjunto continuo de variables referidas a la unidad superficial mediante las que se tratará de estimar la variable de interés (volumen).

En el primer caso, consideraremos el volumen de una unidad inventarial (el cantón) como la suma de los volúmenes de los individuos que la componen. Para ello, se debería cubicar en pie o por secciones una determinada muestra de árboles para obtener un volumen unitario por clase, si bien este método exige el conocimiento de la distribución diamétrica del cantón. No obstante otras veces, por razones de economía y tiempo, se acude a procedimientos de estimación de los valores modulares del volumen por clase de forma indirecta, calculándose entonces el volumen en función de variables de fácil medición (diámetros y alturas medias) aplicando ecuaciones alométricas sencillas.

En el segundo supuesto, consideramos al volumen del cantón como suma de variables predictoras referidas a unidades superficiales (parcela de inventario ó hectárea). En este caso no sería en principio necesario conocer la distribución diamétrica del cantón, entonces suele realizarse un muestreo independiente de áreas basimétricas y de alturas medias, obteniéndose el volumen final en función de estas dos variables.

Veamos la manera de proceder en uno y otro caso para la estimación del volumen de la unidad inventarial, que será normalmente el cantón.

8.2. CUANTIFICACIÓN DEL VOLUMEN DE LA MASA FORESTAL. DEFINICIÓN DE TARIFAS Y TABLAS DE CUBICACIÓN

8.2.1. VOLUMEN DE LA MASA CONOCIENDO LA DISTRIBUCIÓN DIAMÉTRICA

Es necesario determinar primero mediante inventario (por conteo pie a pie o por muestreo) la distribución diamétrica del cantón; a veces también es necesaria la distribución hipsométrica o la curva h/d. Posteriormente se estiman los volúmenes medios de cada clase diamétrica, y finalmente se calculará el volumen total del cantón por suma de los volúmenes de cada clase diamétrica. El volumen medio asignado a cada clase diamétrica se podrá obtener mediante cinco procedimientos de cubicación:

A) CUBICACIÓN POR ÁRBOLES TIPO

Una vez determinada la distribución diamétrica, a cada clase se le asignará un volumen medio unitario extraído del análisis de un determinado número de árboles tipo por clase. El número total de árboles tipo a aprear por clase dependerá del grado de precisión exigido en el inventario. El volumen total por clase se obtiene multiplicando el volumen medio diamétrico por la frecuencia de esa clase diamétrica, y el volumen total de la masa será la suma de los volúmenes unitarios por clase (tabla 8.1):

Clase diamétrica <i>a</i>	Frecuencias	v_i (árboles tipo)	V
10	F_1	$\overline{v_1}$	$V_1 = \overline{v_1} \times F_1$
15	F_2	$\overline{v_2}$	$V_2 = \overline{v_2} \times F_2$
20	F_3	$\overline{v_3}$	$V_3 = \overline{v_3} \times F_3$
25	F_4	$\overline{v_4}$	$V_4 = \overline{v_4} \times F_4$
.	.	.	
.	.	.	
.	.	.	
	N		$V_T = \sum V_i$

Tabla 8.1. Método de cubicación de los árboles tipo

B) CUBICACIÓN POR COEFICIENTES MÓRFICOS

Con este método se supone asemejar los troncos de los árboles a tipos dendrométricos cilindros. Se debe tener para ello los coeficientes mórficos referidos a la sección normal por clase diamétrica y para la especie a cubicar.

Dichos coeficientes mórficos podrán extraerse de los inventarios forestales o del propio análisis de los árboles tipo. Posteriormente se aplicará la fórmula del volumen del cilindro a un pie que represente a la marca de clase y se multiplicará por su correspondiente coeficiente mórfico. La altura media de cada clase diamétrica deberá determinarse mediante entrada en la curva h/d del valor diametral de la marca de clase (tabla 8.2):

Clase diamétrica	Frecuencias	Coefficientes mórficos	Alturas medias	$v_i = \frac{\pi}{4} d_N^2 \bar{h}_i f_i$	$V_i = F_i \times v_i$
10	F_1	f_1	\bar{h}_1	$v_1 = \frac{\pi}{4} \times (0,10)^2 \times \bar{h}_1 \times f_1$	$V_1 = F_1 \times v_1$
15	F_2	f_2	\bar{h}_2	$v_2 = \frac{\pi}{4} \times (0,15)^2 \times \bar{h}_2 \times f_2$	$V_2 = F_2 \times v_2$
20	F_3	f_3	\bar{h}_3	$v_3 = \frac{\pi}{4} \times (0,20)^2 \times \bar{h}_3 \times f_3$	$V_3 = F_3 \times v_3$
25	F_4	f_4	\bar{h}_4	$v_4 = \frac{\pi}{4} \times (0,25)^2 \times \bar{h}_4 \times f_4$	$V_4 = F_4 \times v_4$
.
.
.
N					$V_T = \sum V_i$

Tabla 8.2. Método de cubicación por coeficientes mórficos

C) CUBICACIÓN POR RELACIONES ALOMÉTRICAS

Se calculará el volumen unitario por clase en función de varios parámetros dendrométricos (diámetro y altura normalmente). Con las frecuencias diamétricas se calculará el volumen total de cada clase, cuya suma nos ofrecerá el volumen total de la masa como en los casos anteriores. En este caso, si la relación alométrica viene ajustada en función de la altura, también es necesario estimar las alturas medias por clase a través de la entrada en la curva h/d de las marcas de clase (tabla 8.3):

Clase diamétrica	Frecuencias	Alturas medias	$v_i = f(d_N, \bar{h}_i, x)$	$V_i = F_i \times v_i$
10	F_1	\bar{h}_1	$v_1 = f((0,10), \bar{h}_1, x)$	$V_1 = F_1 \times v_1$
15	F_2	\bar{h}_2	$v_2 = f((0,15), \bar{h}_2, x)$	$V_2 = F_2 \times v_2$
20	F_3	\bar{h}_3	$v_3 = f((0,20), \bar{h}_3, x)$	$V_3 = F_3 \times v_3$
25	F_4	\bar{h}_4	$v_4 = f((0,25), \bar{h}_4, x)$	$V_4 = F_4 \times v_4$
.
.
.
N				$V_T = \sum V_i$

Tabla 8.3. Método de ubicación mediante relaciones alométricas

Dentro de este apartado deberíamos mencionar como casos especiales de relaciones alométricas las denominadas **tarifas y tablas de cubicación**. Se trata de dos modelos matemáticos que proporcionan una estimación del volumen en forma de tabla numérica, gráfica o analítica, en función del diámetro normal y de la altura total. La principal diferencia entre ambas relaciones alométricas son las siguientes:

- Las tarifas de cubicación son ecuaciones de cubicación de una entrada:

$$V = f(d_N)$$

- Las tablas de cubicación son ecuaciones de cubicación de dos entradas:

$$V = f(d_N, h_T)$$

- También es posible encontrar tablas de cubicación de tres entradas:

$$V = f(d_N, h_T, x)$$

Donde la variable adicional x podría ser cualquier variable medida en el árbol (diámetro a 4 m, altura en la mitad, área basimétrica, etc).

Veremos los procedimientos de cubicación de la masa a nivel cantón empleando tarifas y tablas de cubicación.

D) CUBICACIÓN POR TARIFAS

El método exige conocer la distribución diamétrica de la masa y la tarifa. Se cubica el árbol medio de cada clase diamétrica con la tarifa, el volumen total de la clase se obtiene multiplicando los volúmenes unitarios de cada clase, por el número de individuos que la componen. El volumen de la masa será la suma de los volúmenes totales de cada clase diamétrica (tabla 8.4):

Clase diamétrica	Frecuencia	Volumen unitario	Volumen por clase diamétrica
10	N_1	V_1	N_1V_1
15	N_2	V_2	N_2V_2
20	N_3	V_3	N_3V_3
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
			V_{TOTAL}

Tabla 8.4. Cubicación por tarifas

E) CUBICACIÓN POR TABLAS

Existen dos procedimientos para cubicar la masa mediante tablas, según la información de partida disponible para realizar los cálculos:

Procedimiento A. Cubicación de la masa mediante aplicación de la tabla de cubicación a la distribución diamétrica

Para este procedimiento, se considerarán conocidos los siguientes parámetros:

1. La tabla de cubicación: $V = f(d, h)$
2. La distribución diamétrica media de la masa

Este procedimiento consiste básicamente en (tabla 8.5):

1. Es necesario elegir una muestra de alturas para construir la curva h/d
2. Asignaremos una altura media a cada clase diamétrica en función de la curva h/d
3. Se calcula el volumen unitario medio por clase diamétrica, en función de la altura media por clase
4. Se calcula el volumen total por clase diamétrica
5. El volumen total de la masa será el sumatorio de los volúmenes totales de cada clase diamétrica

Clase diamétrica	Frecuencia	Altura media	Volumen medio unitario	Volumen total
10	f_1	h_1	v_1	V_1
15	f_2	h_2	v_2	V_2
20	f_3	h_3	v_3	V_3
.
.
.
				V_{TOTAL}

Tabla 8.5. Cubicación mediante tabla de cubicación conocida la distribución diamétrica

Procedimiento B. Cubicación de la masa mediante aplicación de la tabla de cubicación a una muestra de pies

En este segundo procedimiento es necesario:

1. La tabla de cubicación: $V = f(d, h)$
2. La distribución diamétrica de la masa
3. Elegir una muestra de árboles en los que se mide únicamente el diámetro y la altura

Conocidos estos valores, el procedimiento para cubicar consistirá en (tabla 8.6):

1. Cubicaremos solamente los pies de la muestra con la tabla de cubicación
2. Construiremos una tarifa de cubicación ajustando los volúmenes obtenidos con los diámetros de los árboles de la muestra
3. Asignaremos un volumen medio unitario a cada clase diamétrica con la tarifa, y se calculará el volumen total de cada clase diamétrica y el volumen total de la masa por sumatorio de las clases

Clase diamétrica	Frecuencia	Muestra	Volúmenes Muestra $v = f(d, h)$	Volumen unitario clase $V = f(d)$	Volumen por clase diamétrica.
10	f_1	1(d1,h1)	v_1	V_1	$f_1 V_1$
15	f_2	2(d2,h2)	v_2	V_2	$f_2 V_2$
.
.
.
Ajuste tarifa					V_{TOTAL}
$v = f(d)$					

Tabla 8.6. Cubicación mediante tabla de cubicación aplicada a una muestra de la distribución

Este segundo procedimiento, si bien en principio puede resultar algo caótico, ya que disponiendo de una tabla inicial se calcula una tarifa, resulta del mayor interés para el cálculo de crecimientos, por la ventaja que para ello conlleva el uso de una tarifa en detrimento de una tabla de cubicación.

Finalmente, creemos necesario indicar las grandes posibilidades que tenemos actualmente para ajustar tanto tablas como tarifas de cubicación. Así, desde aproximadamente 1990, se ha producido un cambio metodológico importante en el ajuste de modelos matemáticos para emplearlos como fórmulas de cubicación. Antes de esta fecha los medios de cálculo eran limitados y los gestores forestales debían atenerse al empleo de fórmulas matemáticas previas relativamente simples para el cálculo de existencias.

Desde que el uso de ordenadores y software de tratamiento de datos específico se ha generalizado no existe ya este obstáculo, viéndose aumentar en cantidad y calidad las tarifas de cubicación empleadas utilizando los medios más modernos disponibles. No obstante, pensamos es más necesario conocer la filosofía de los ajustes y el conocimiento de la manera de emplearlos, que el memorizar el manejo rutinario de un potente programa informático.

8.2.2. VOLUMEN DE LA MASA COMO SUMA DE UNIDADES SUPERFICIALES

En este caso se estima el volumen por unidad superficial (parcela) en función de parámetros dasométricos conocidos sin necesidad de calcular volúmenes individuales. Por ejemplo, el caso más típico sería obtener el volumen de la siguiente manera:

$$V_{\text{parcela}} = f(G,H), \text{ en donde } G \text{ sería el área basimétrica (m}^2\text{/ha) y } H \text{ la altura media (m)}$$

Esos dos parámetros se pueden calcular de la siguiente forma:

- a) **Por muestreo relascópico:** utilizando el relascopio de Bitterlich se mide el volumen superficial de una hectárea ficticia, con el conteo de varios árboles por hectárea y midiendo su área basimétrica y/o su altura. El fundamento sobre el manejo del relascopio de Bitterlich se ha abordado ampliamente en un tema aparte, al cual remitimos al alumno
- b) **Por procedimiento tradicional:** se utiliza la distribución diamétrica de la unidad superficial real. Se cuentan todos los árboles de una hectárea y se miden todos sus diámetros y algunas alturas para obtener el volumen de dicha unidad superficial

8.3. METODOLOGÍA PARA LA CONSTRUCCIÓN DE TARIFAS Y TABLAS DE CUBICACIÓN

8.3.1. INTRODUCCIÓN

De una manera global se deben seguir tres fases para la construcción de estas fórmulas de cubicación:

1. Recogida de datos
2. Construcción del modelo matemático
3. Validación de los resultados ofrecidos por el modelo

8.3.2. RECOGIDA DE LOS DATOS NECESARIOS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE TARIFAS Y TABLAS DE CUBICACIÓN

a. Variables a medir (entradas de la futura tabla)

Hay que decidir en primer lugar qué tipo de volumen interesa medir, es decir, la salida del modelo, para poder escoger adecuadamente las entradas (variables independientes), ya que una vez recogidos los datos y construida la ecuación, no será posible extraer de ella un volumen que no haya sido previsto inicialmente. Por ello es muy importante elegir bien las dimensiones que es preciso medir en los árboles para "entrar" en el modelo y deducir su volumen, para lo cual debemos tener en cuenta:

- La suficiente comodidad de la medida de esas dimensiones

- El valor de la relación estadística entre ellas y el volumen o precisión exigida para la salida

Las investigaciones resuelven que generalmente:

- Para una tarifa de una entrada, se escogerá el diámetro normal
- Para una tabla de dos entradas, se escogerá como segunda variable la altura total
- Las tablas de tres entradas necesitan para su utilización la medida efectiva de tres dimensiones, por lo que generalmente no se recomiendan

b. Tamaño de la muestra (número de árboles a medir, "n")

La elección del número de árboles a medir para construir el modelo de cubicación dependerá de la variabilidad morfológica de la especie, de la precisión exigida en la ecuación (se obtiene una mayor precisión cuanto mejor se modelicen los extremos de la nube de puntos) y de la amplitud de la zona de estudio.

De acuerdo a estas premisas, se tomará una muestra constante de "*n*" pies repartidos por todas las clases diamétricas, en lugar de coger una muestra proporcional a la distribución diamétrica.

Si el modelo es una tarifa sabremos que tendrá una validez local, y ello exige una homogeneidad de calidad de estación. Si así ocurre, con pocos árboles de muestra será suficiente para ajustar el modelo. Si no se cumple algún requisito, habrá mucha variabilidad, por tanto para definir la tendencia de la nube de puntos habrá que elegir muchos pies.

Si el modelo es una tabla de dos entradas se podrá recoger mejor la variabilidad de la masa, con lo que a igualdad de condiciones se necesitará un menor número de pies en la muestra. Esto permite que el ámbito de aplicación de la tabla sea más amplio que el de la tarifa. Por tanto, el número total de árboles a medir depende del tamaño de la zona sobre la que se quiera utilizar el modelo que se va a construir:

- Si la tarifa se destina a cubicar una masa única y homogénea, la muestra estará constituida por 30 árboles
- Para un cantón entero, de unas 15 ha por ejemplo, se tomarán 100 árboles
- Para un monte, de unas 1.000 ha por ejemplo, se cogerán 400 árboles
- Para una región natural, se elegirán 800 árboles
- Para el área de una especie, se tomarán de 2.000 a 3.000 árboles

c. Procedencia de los árboles muestra

Si el modelo de cubicación está destinado a cubicar árboles a cortar, sólo serán necesarios árboles cortados en la muestra. Si la ecuación está destinada también a estimar masas en pie, es preciso completar la muestra con árboles en pie, pues se comprueba que la relación estadística entre el volumen y el diámetro es diferente para los árboles apeados en una corta y los árboles que quedan en pie.

8.3.3. PROCEDIMIENTOS DE AJUSTE DE LAS FÓRMULAS DE TARIFAS Y TABLAS DE CUBICACIÓN

Existen dos procedimientos de ajuste de tarifas y tablas de cubicación:

a) Procedimientos gráficos

Estos métodos básicamente consisten en la representación sobre un eje de coordenadas de los parámetros medidos en cada caso, ajustando una recta que deje por encima y por debajo aproximadamente el mismo número de puntos.

- En **tablas de una entrada** (tarifas) se suelen utilizar los siguientes métodos:
 - Método de HUFFEL (1919). Se toman árboles muestra, se mide su diámetro y se cubican. A continuación, se representan los pares de puntos (V, d) en un sistema de ejes y se traza una curva media que deje por encima y por debajo aproximadamente el mismo número de puntos. Este método tan rudimentario recoge la base del ajuste del mínimos cuadrados, y proporcionó excelentes resultados. Para evitar la tendencia curvilínea de los ajustes se puede transformar la curva en una recta: $V = f(d^2)$, haciendo la representación con el volumen en función del cuadrado del diámetro (d^2) ó del área basimétrica (g)
 - Método de ABADIE (1956). Concreta el anterior método, haciendo hincapié en el modo de elegir los árboles de la muestra, de forma estratificada, dividiendo el monte en los estratos dominante y dominado. Esto implica conocer el monte antes de realizar el muestreo. Es un modelo de escala doble en el eje de abscisas y tiene por expresión el modelo lineal: $\log V = \log d$
- En **tablas de dos entradas** se usa:
 - Método de PATRONE (1963). En abscisas se representa una combinación de diámetro normal y altura total, o bien en el eje aparecen prefijadas las alturas.

b) Procedimientos analíticos

Consiste en elaborar ecuaciones o modelos en los que se estudia la precisión de los ajustes. Los modelos prefijados son diferentes en función de la tabla o tarifa que se pretenda aplicar o de la masa que se quiera cubicar:

- **Ajuste de tarifas de cubicación.** Se pueden utilizar tarifas para masas regulares e irregulares, pero hay que tener en cuenta que las curvas de las masas regulares no son estables en el tiempo, por contra, las masas irregulares tienen una gran variabilidad puesto que la nube de puntos está muy dispersa. Las más comunes son las siguientes:
 - Para masas regulares, el mejor modelo es el de *Huffel-Abadie* (1919). Este autor se basa en las siguientes dos consideraciones respecto al volumen de los árboles:
 - ✓ El volumen y el área basimétrica se relacionan de forma lineal: $V = a + bg$
 - ✓ El volumen y el diámetro se relacionan mediante un modelo curvilíneo (parábola de primer grado): $V = a + bd^2$
 - Para masas irregulares, se pueden utilizar los dos modelos siguientes:
 - ✓ Modelo de Hohenadl (1939): $V = a + bd + cd^2$
 - ✓ Modelo exponencial de Meyer (1946): $V = ad^b$

El más utilizado en Europa es el modelo de Hohenald, aunque tiene el inconveniente de que en su culminación la curva empieza a ser descendente, por tanto no ofrece buenas estimaciones para valores elevados de diámetro (deja de ajustarse a la nube de puntos en los mayores volúmenes)

- **Ajuste de tablas de cubicación.** No hay en este caso distinción entre masas regulares e irregulares, sirven para ambos tipos de masa. Aunque existen una serie de modelos que se ajustan mejor para una u otra forma de masa, hay casos en los que se mejoran los ajustes comprobando todos los que oferta cualquier software estadístico. Las más utilizadas en Dasometría han sido las siguientes:
 - ✓ Fórmulas de variable combinada:

$$V = a_1 d^2 h$$

$$V = a_0 + a_1 d^2 h$$

$$V = a_0 + a_1 d^2 h + a_2 (d^2 h)^2$$

La primera ecuación está obligada a pasar por el origen y al hacer el análisis de regresión sin constante, obtendremos una R^2 mucho mayor de lo que debería. Al observar la representación gráfica del modelo y los test de hipótesis se deduce que el ajuste no es tan bueno como aparenta. Las otras dos ecuaciones se calculan por análisis de regresión

- ✓ Fórmula australiana:

$$V = a_{00} + a_{01} + (a_{01} + a_{11}h)d^2$$

Se puede deducir por un método de regresión múltiple por mínimos cuadrados.

- ✓ Fórmula de SCHUMACHER (s.f.):

$$V = ad^b h^c$$

Este modelo se puede convertir en una ecuación lineal mediante transformación logarítmica:

$$V = \ln(a) + b \ln(d) + c \ln(h)$$

Sin embargo, no debemos olvidar que en esta transformación aparece un sesgo aunque éste no sea demasiado importante.

Tanto en tarifas como en tablas de cubicación, existen además modelos numéricos en forma de tabla, para los cuales se divide la masa en clases diamétricas y de altura, se elige una muestra y se calcula el volumen medio. Es necesario entonces incluir la desviación típica muestral en la estimación del volumen:

$$S_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum (v_i - \bar{v})^2}{n-1}}$$

8.4. PRECISIÓN DE LAS TARIFAS Y TABLAS DE CUBICACIÓN

8.4.1. PRECISIÓN DE LAS TARIFAS DE CUBICACIÓN

La precisión de los distintos métodos empleados dependerá del tipo de tabla o del modelo de construcción de éstas.

- La precisión de la **tarifa gráfica** se puede corregir a través del volumen teórico de la masa, mediante un factor de corrección, ya que conocemos el volumen real de la muestra. En el modelo gráfico queda determinada la precisión con la dispersión de la nube de puntos. Al conocer estos puntos, lo único que se puede hacer es corregir el resultado de la cubicación.

Masa	N	V_T	V_R
Tarifa muestra	n	V'_T	V'_R

Donde:

N : masa completa

n : muestra utilizada para construir la tarifa

V_T y V'_T : volúmenes teóricos obtenidos con la tarifa, de la masa y de la muestra respectivamente

V'_R : volumen real de la muestra

V_R : volumen real de la masa, que es lo que buscamos

- En la **tarifa analítica** el indicador de la precisión puede ser:
 - El estadístico R^2 (desviación típica residual)
 - El análisis de la nube de puntos de los residuos, que indicará la precisión en el análisis de regresión y es igual a la dispersión media cuadrática entre los valores reales y los estimados
 - El error estándar de la regresión: $S_{xy} = SEE = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - 2}}$

Para la tarifa numérica hay que comprobar además la desviación típica (SE) de los datos de la tabla (tabla 8.7):

Diámetro	Volumen medio dimensional
10	\bar{V}_{10} 6 SD
15	\bar{V}_{15} 6 SD
20	\bar{V}_{20} 6 SD
.	.
.	.
.	.

Tabla 8.7. Cálculo del error en tarifa de cubicación

Diámetro	Altura 1	Altura 2	...
10	V ₁ 6 SD	V ₂ 6 SD	...
15	V ₁ 6 SD	V ₂ 6 SD	...
20	V ₁ 6 SD	V ₂ 6 SD	...
.
.
.

Tabla 8.8. Cálculo del error en tabla de cubicación

$$S_{\hat{y}} = SE = \sqrt{S_{yx}^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \right)}$$

Aunque no conocemos el error que estamos cometiendo sí podremos acotar el intervalo de confianza con un determinado nivel de probabilidad:

$$V = \bar{v} \pm SE \quad \rightarrow \text{para un 68,27\% de los casos}$$

$$V = \bar{v} \pm 2SE \quad \rightarrow \text{para un 95,45\% de los casos}$$

$$V = \bar{v} \pm 3SE \quad \rightarrow \text{para un 99,73\% de los casos}$$

8.4.2. PRECISIÓN DE LAS TABLAS DE CUBICACIÓN

Con las tablas de cubicación se reduce el error cometido por las tarifas al introducir más parámetros. Se supone que para una misma especie, el mismo diámetro normal y altura total darán lugar al mismo volumen; en tarifas para el mismo diámetro normal se obtienen distintos volúmenes en función de la altura del árbol.

Si cubicamos más de un pie no es la desviación típica (σ) quien nos informa sobre el error cometido, sino el error estándar (SE):

$$SE = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Por ejemplo, si quisiéramos cubicar 16 árboles de 22 m de altura y 35 cm de diámetro, con un volumen medio de 1.009 dm³ y $\sigma = 144$, el error cometido sería:

$$SE = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \sqrt{\frac{144^2}{16}} = \frac{144}{\sqrt{16}}$$

El intervalo de confianza para el valor del volumen será:

$$V = \bar{V} \pm t \times SE$$

Donde t es el valor de la t -student (95% probabilidad). Por tanto:

$$V=100961,96 \frac{144}{\sqrt{16}}$$

El volumen estará comprendido entre $1009 - 1,96 \times 36$ y $1009 + 1,96 \times 36$, esto es:

$$(938 \leq V \leq 1.079)$$

Examinando las fórmulas anteriores vemos que cuanto mayor sea el número de árboles que cubicamos, mayor será la precisión. Así, si se cubica sólo un pie, el volumen estimado será $100961,96 \times 144$, por tanto el volumen estará comprendido entre 727-1291 dm³.

Ésta enorme amplitud de valores posibles está relacionada con la variabilidad natural de la especie y no con el método de construcción del modelo. Ello indica que no es preciso exigir a una tabla de cubicación que elimine la variabilidad biológica, lo que significa que, incluso con una tabla de cubicación de dos entradas, no se puede cubicar un árbol con precisión, aún cuando lo sea más que con un modelo de una entrada (tarifa).

Cuando se cubica un conjunto de árboles el método de cubicación mediante tablas no es riguroso, pero proporciona magnitudes completamente aceptables. Si tenemos un lote de N pies de la misma especie, de diámetro medio D y altura media H, se procederá como si todos los árboles tuvieran el mismo diámetro y la misma altura y se utilizará el método expuesto anteriormente para cubicar los 16 pies. La desviación típica de la media del lote será igual a la desviación típica que se lee en la casilla (D, H) dividida por \sqrt{N} .

8.5. LÍMITES DE VALIDEZ DE LAS TABLAS Y TARIFAS DE CUBICACIÓN

Para construir una tabla de cubicación debemos elegir una muestra de árboles en los cuales se miden los parámetros elegidos. La muestra debe ser tomada en una zona muy homogénea, generalmente a nivel de cantón y para una misma especie, en todas las categorías dimensionales. Estrictamente las tarifas y tablas sólo se deberían aplicar a la zona de la que se ha extraído la muestra.

Por tanto, el rango de aplicación de la tabla depende de las muestras: si se hace para una zona homogénea la precisión será muy grande, pero sólo en esa zona concreta. Para distintas calidades de estación aumenta la zona de aplicación, por tanto la muestra elegida deberá ser mucho más heterogénea para que la precisión no disminuya.

Construir una nueva tarifa o tabla de cubicación supone un gran gasto. Por ello, se puede comprobar si una tabla construida anteriormente para un monte es válida en otros. Se podría aplicar si se cumplen previamente una serie de requisitos:

- Si la tabla ofrece un valor de desviación típica residual $\left(SEE = \sqrt{\frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-1}}\right)$

para cada clase dimensional, se puede comprobar su bondad tomando una muestra de individuos del monte para el que queremos utilizar la tabla, de entre 20 y 40 pies (3 ó 4 por clase dimensional); estos pies se cubicarán perfectamente y se calculará el volumen real de dichos árboles. A continuación se cubican esos mismos individuos con la tarifa que estamos probando, determinando un volumen estimado. Calculando el residuo $|\hat{v}_i - v_i|$ entre el valor real y el estimado con el modelo, veremos cuántos árboles tienen un valor estándar que supere al SEE (tabla 8.9).

Volumen real de la muestra	Volumen estimado con la tabla	Residuo
v_{R1}	\hat{v}_{R1}	R_1
v_{R2}	\hat{v}_{R2}	R_2
.	.	.
.	.	.
v_{RN}	\hat{v}_{RN}	R_N

Tabla 8.9. Comprobación de la validez de una tabla de cubicación mediante SEE

Para aplicar con garantías la tabla de cubicación, el 68% de los volúmenes de la muestra debe cumplir que:

$$|\hat{v}_i - v_i| < SEE$$

- Si no tenemos la desviación del modelo, se puede aplicar un test de hipótesis para comprobar si la distribución de volúmenes de árboles medidos no es comparativamente distinta a la dada por la tarifa. Según el resultado obtenido se acepta o se rechaza la tarifa para cubicar la masa. Hay dos procedimientos para realizar esta comprobación:

- Procedimiento de la t - student. Con los datos reales de volumen de los árboles muestra en nuestra masa (\bar{V}_R, S^2_{VR}, n) y los datos estimados con la tabla para esa muestra (\bar{V}_E, S^2_{VE}, n) se construirá el estadístico t^* :

$$t^* = \frac{\bar{V}_R - \bar{V}_E}{\sqrt{\frac{S^2_{VR} + S^2_{VE}}{n}}}$$

Si $P(t \leq t^*) < 0.05$, entonces los valores medios de los volúmenes reales y los calculados por la tabla son diferentes, por lo que no podría aplicarse la tabla de cubicación en nuestra zona.

2. Procedimiento de la χ^2 . Es más correcto que el anterior ya que un modelo de cubicación puede ser válido como consecuencia del azar, por ejemplo al comparar el conjunto de las clases diamétricas en lugar de comparar de forma individual cada una de las clases. Los datos reales observados en una muestra (V_{Ri}) y los datos estimados por la tabla para la muestra (V_{Ei}), se agrupan por clases dimensionales y se calculará el índice de divergencia para cada clase (tabla 8.10):

$$\chi^2 = \frac{(f_i - \hat{f}_i)^2}{\hat{f}_i}$$

Clase de volumen	Frecuencia de volumen real	Frecuencia de volumen estimado	$\chi^2 = \frac{(f_i - \hat{f}_i)^2}{\hat{f}_i}$
V_1	f_1	\hat{f}_1	χ^2_1
V_2	f_2	\hat{f}_2	χ^2_2
V_3	f_3	\hat{f}_3	χ^2_3
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
			χ^2

Tabla 8.10. Validez en la aplicación de tablas de cubicación mediante el test de la χ^2

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABADIE, J. Y AYRAL, P. (1.956). *Méthode de calcul du volume des peuplements sur pied dans les places d'essais de sylviculture*. I. Définition et présentation par P. AYRAL. II. *Etudes mathématiques et statistiques par J. ABADIE*. *Annales de l'Ecole nationale des Eaux et Forêt*, tome XV, FASCICULE 1, PP-1-135
- HOHENADL, W. (1.939). *Einführung in die Bestandesberechnung mit Hilfe von zwein Mittelstämmem*. Fw. Cbl.
- HUFFEL, G. (1.919). *Économie forestière, Tome II*. 2ª Edición. La Maison Rustique. Paris. 502 pp.
- MEYER, H.A. (1.942). *Bark volume determination in trees*. Journal of For. N° 12.
- PATRONE, G. (1.963). *Lezioni di Dasometría*. Firenze B. Coppini. 392 pp
- SCHUMACHER, F.X. (s.f.). *Logarithmic expression of timber-tree volume*. J.A.R.

TEMA 9. CÁLCULO DE PARÁMETROS DE MASA POR MUESTREO PUNTUAL (CONTEO ANGULAR). DASOMETRÍA RELASCÓPICA

- I. INTRODUCCIÓN: PRINCIPIO DE LA PARCELA MÓVIL DE BITTERLICH (1984)
 - II. FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE LA PARCELA MÓVIL DE BITTERLICH
 - III. EL RELASCOPIO DE BITTERLICH: DESCRIPCIÓN DE BANDAS, RELACIÓN ENTRE BANDA Y BAF, MEDICIÓN DE DISTANCIAS HORIZONTALES, MEDICIÓN DE DIÁMETROS, MEDICIÓN DE ALTURAS, MEDICIÓN DE LA ALTURA DIRECTRIZ Y MEDICIÓN DE PENDIENTES
 - IV. FASES EN LA REALIZACIÓN DE UN MUESTREO RELASCÓPICO: ELECCIÓN DEL NÚMERO DE ESTACIONAMIENTOS, ELECCIÓN DE BANDA
 - V. OTRAS APLICACIONES DEL RELASCOPIO. MUESTREO ANGULAR VERTICAL
-

9.1. INTRODUCCIÓN: PRINCIPIO DE LA PARCELA MÓVIL DE BITTERLICH

Si nos situamos en un punto del monte (estaremos realizando un estacionamiento) provistos de un calibre de ángulo fijo y damos sobre nuestros talones una vuelta completa de 360°, haciendo superponer las visuales extremas del calibre sobre las secciones normales de todos los pies, tendremos que una estimación del área basimétrica desde dicho punto, será proporcional al número de árboles cuya sección normal rebase las visuales del calibre. Dicho coeficiente de proporcionalidad dependerá exclusivamente del ángulo del calibre, el cual, fija el alcance en profundidad del aparato. Lógicamente, a menor ángulo del calibre, mayor número de pies serán intersectados por las visuales.

Los pies así seleccionados integran lo que se denomina como **parcela móvil de Bitterlich*** (1984). Este sistema de selección de pies da lugar a una distinta probabilidad de ser elegidos los árboles de la masa. La probabilidad de que un árbol sea interceptado por las visuales depende del tamaño del pie (sección normal) y de su distancia al punto de estacionamiento. Este tipo de muestreo forestal se denomina *muestreo por conteo angular*

Si aplicamos la teoría del muestreo aleatorio y utilizamos el conteo angular en distintos puntos del monte o unidad inventarial, podremos estimar el área basimétrica media del monte con un error de muestreo a un determinado nivel de probabilidad.

*Dr. **WALTER BITTERLICH**, nació en Salzburgo (Austria) en 1908. Se graduó como ingeniero forestal en la Agricultural University de Viena en 1930. A partir de ese año sirvió en el Servicio Forestal Austriaco hasta 1966, en que fue profesor del Institute for Forest Yield Studies in the Agricultural University de Viena hasta su jubilación en 1978. Su trabajo científico comenzó en el año 1931 y tuvo su mayor éxito a partir de 1940, con su idea revolucionaria del muestreo angular (Angle Count Sampling, "ACS"), hace ya más de 50 años. Todavía hoy en todo el mundo se estudian y se emplean los métodos de esta filosofía de medición forestal, muy aplicable a inventarios. Ha participado en multitud de Congresos organizados por FAO y IUFRO siendo el padre del SPIEGEL-RELASKOP (relascopio), aparato capaz de realizar la medición de casi cualquier parámetro forestal basándose en el muestreo angular. En 1984 publicó el libro "The relascope idea" en el que resumió los resultados de las experiencias acumuladas durante casi 40 años en la medición forestal

Para realizar el muestreo angular se necesita la materialización de un calibre angular, con bandas de intercepción, una mirilla o apertura y un prisma dióptrico. En la actualidad, el aparato que proporciona todas estas utilidades es el relascopio.

9.2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE LA PARCELA MÓVIL DE BITTERLICH

9.2.1. INTRODUCCIÓN

El número de individuos que integran una parcela móvil, generada por un calibre angular de apertura α y centro en P , vendrá dado en función de sus dimensiones con respecto a la abertura del calibre (BITTERLICH, 1984). Referente a la inclusión o no de pies en la parcela móvil, cuando el diámetro normal de un pie es mayor que la abertura del calibre, se contabilizará como uno en dicha parcela, si entra ajustado (visuales tangentes a su sección normal) será medio, y si no llega a tocar la abertura no entrará en la parcela, esto es, se cuenta como 0 (figura 9.1):

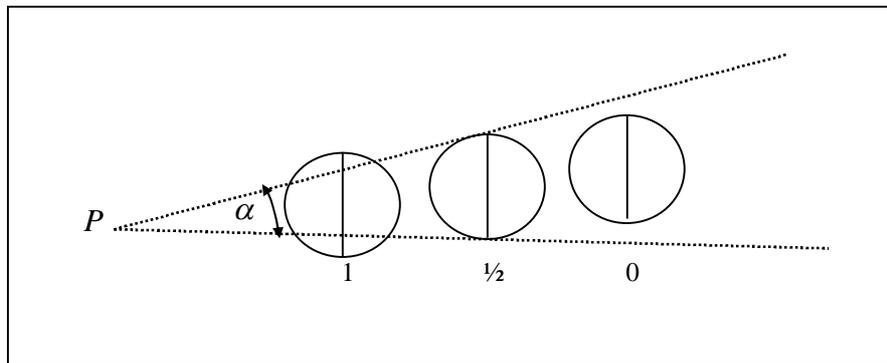


Figura 9.1. Inclusión de pies en el conteo angular horizontal

Para inventariar con unidades de muestreo puntual horizontal, el operador se ubicará en diferentes puntos de la masa localizados al azar, e irá proyectando desde ellos un ángulo horizontal α hacia todos los árboles del entorno (figura 9.2):

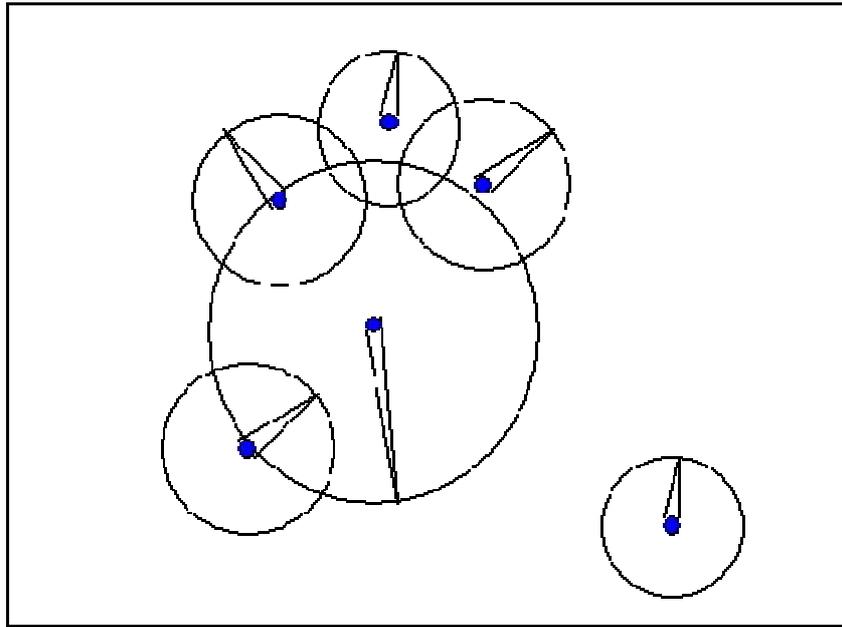


Figura 9.2. Estacionamientos en muestreo angular horizontal

Serán contados en cada parcela generada todos los árboles que se incluyen dentro del ángulo o lo rebasan, siendo el resto excluidos. Si el terreno no es horizontal debe ser corregido el efecto de la pendiente, factor contemplado en las mediciones realizadas mediante relascopio. Por tanto, la parcela móvil no tiene forma ni superficie definida, sólo individuos, excepto cuando los pies son del mismo tamaño, en cuyo caso la parcela será circular. Si se pudiese hablar con propiedad al referirnos al radio de la parcela móvil, diríamos que es un radio proporcional al radio o diámetro del árbol divisado (figura 9.3):

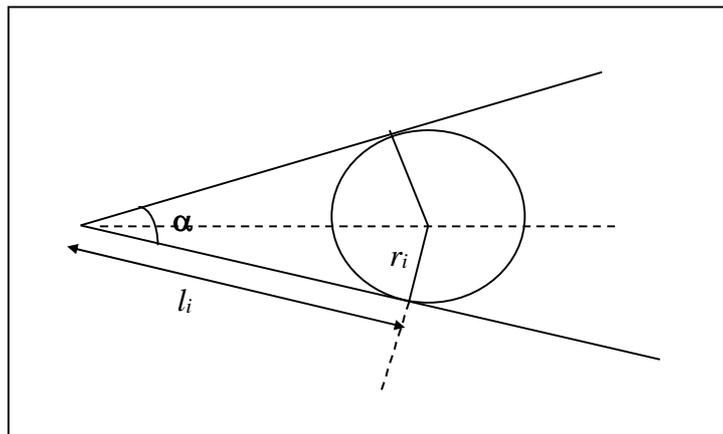


Figura 9.3. Relación entre radio del árbol y radio de parcela

Al emplear unidades de muestreo angular horizontal, se puede considerar que cada árbol está incluido en un círculo de radio l_i , proporcional a su diámetro y por tanto a su radio (r_i). Por ejemplo, supongamos un árbol ubicado a la distancia crítica, esto es, el diámetro normal es igual a la amplitud de las visuales:

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \frac{r_i}{l_i} \Rightarrow l_i = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} r_i$$

$$\text{Llamaremos } K = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{Por tanto } l_i = Kr_i$$

9.2.2. APLICACIÓN DEL PRINCIPIO ANGULAR DE BITTERLICH

Sea X cualquier atributo medible de un árbol (g, h, n, v), y supongamos hipotéticamente que todos los pies de la masa tienen el mismo diámetro normal (d_i), con el fin de poder conocer la superficie de la parcela móvil. En este caso sería una parcela de radio igual a:

$$l_i = Kr_i = K \frac{d_i}{2}$$

Si denominamos:

- x_{ij} : atributo medible del pie j perteneciente a la clase diamétrica i
- z_i : número de pies que entran en el conteo angular pertenecientes a la clase diamétrica i
- g_i : área basimétrica unitaria de un pie de la clase diamétrica i
- n : número de clases diamétricas existentes en el monte

Podemos hallar un atributo por ha (X_i) en la población generada por un estacionamiento angular realizado mediante calibre de abertura α y $K = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}$ de

la siguiente manera:

$$X_i = \frac{\sum_{j=1}^{z_i} x_{ij}}{\frac{\pi l_i^2}{10^4}} = \frac{\sum_{j=1}^{z_i} x_{ij}}{\pi K^2 r_i^2} \times 10^4 = \frac{\sum_{j=1}^{z_i} x_{ij}}{K^2 g_i} \times 10^4$$

$$X_i = \frac{10^4}{K^2} \times \frac{\sum_{j=1}^{z_i} x_{ij}}{g_i}$$

Si la población tuviese pies exclusivamente de diámetro d_2 particularizaríamos para esta clase diamétrica:

$$X_2 = \frac{10^4}{K^2} \times \frac{\sum_{j=1}^{z_2} x_{2j}}{g_2}$$

En realidad rara vez ocurre esto, ya que lo habitual es tener en una masa dos ó más clases diamétricas. Por ello el atributo medible por ha en una parcela móvil sería la suma de los atributos medibles por ha en cada una de las clases diamétricas que entran en el conteo angular de Bitterlich, una vez se haya fijado K :

$$X = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n \frac{10^4}{K^2} \sum_{j=1}^{z_i} \frac{x_{ij}}{g_i}$$

$$X = \frac{10^4}{K^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{z_i} \frac{x_{ij}}{g_i}$$

Al término constante de la expresión anterior ($\frac{10^4}{K^2}$) se le denomina BAF (factor de área basal o factor de conteo):

$$BAF = \frac{10^4}{K^2} = \frac{10^4}{\left(\frac{1}{\text{sen}(\alpha/2)}\right)^2} = 10^4 \times \text{sen}^2(\alpha/2)$$

Según la expresión de cálculo de parámetros en función del BAF, podremos particularizar la variable X para cualquier atributo medible de la masa forestal, obteniéndose una estimación de los parámetros de la masa mediante muestreo angular horizontal.

$$X = BAF \times \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{z_i} \frac{x_{ij}}{g_i}$$

1. CÁLCULO DE G (m²/ha)

- Consideraremos $X = G$ ($x_{ij} = g_{ij} = g_i$):

$$G(m^2/ha) = \frac{10^4}{K^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{z_i} \frac{g_i}{g_i} = \frac{10^4}{K^2} \sum_{i=1}^n z_i = \frac{10^4}{K^2} \times Z$$

$$G = BAF \times Z$$

siendo Z el número de pies que entran en el conteo angular.

2. CÁLCULO DE N (pies/ha)

- Particularizamos para $X = n^\circ$ de pies/ha

$$N = \frac{10^4}{K^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{z_i} \frac{1}{g_i} = \frac{10^4}{K^2} \sum_{i=1}^n \frac{z_i}{g_i}$$

$$N = BAF \times \sum_{i=1}^n \frac{z_i}{g_i} \text{ (pies/ha)}$$

3. CÁLCULO DE H (altura media/ha)

- Sustituiremos X = altura:

$$H = \frac{10^4}{K^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{z_i} \frac{h_{ij}}{g_i} = \frac{10^4}{K^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{g_i} \sum_{j=1}^{z_i} h_{ij}$$

$$H = BAF \times \sum_{i=1}^n \frac{z_i \bar{h}_i}{g_i} \text{ (m/ha)}$$

La altura media de la masa virtual generada por el conteo angular será:

$$\bar{H} = \frac{H}{N} = \frac{\sum N_i \bar{h}_i}{N}$$

Por otra parte, se demuestra que la altura media de los pies que entran en el conteo angular (z_i) coincide con la altura media de Lorey (H_L) de la masa virtual generada por el muestreo relascópico.

$$H^I = \frac{\sum z_i \bar{h}_i}{\sum z_i} = \frac{BAF \sum z_i \bar{h}_i}{BAF \sum z_i} = \frac{\sum G_i \bar{h}_i}{\sum G_i} = H_L$$

4. CÁLCULO DE V (m³/ha)

- Consideraremos X = volumen de la masa

$$V = \frac{10^4}{K^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{g_i} \sum_{j=1}^{z_i} v_{ij} = BAF \sum_{i=1}^n \frac{z_i \bar{v}_i}{g_i} = \sum \frac{G_i \bar{v}_i}{g_i} = \sum_{i=1}^n N_i \bar{v}_i$$

$$V = BAF \times \sum_{i=1}^n N_i \bar{v}_i \text{ (m}^3 \text{ / ha)}$$

9.3. EL RELASCOPIO DE BITTERLICH

9.3.1. INTRODUCCIÓN

El relascopio de Bitterlich es un dendrómetro de uso múltiple que sirve para realizar las siguientes mediciones tanto del árbol individual como de la masa:

1. Distancias horizontales (15,20,25 y 30 m)
2. Diámetro normal y diámetro de fuste a cualquier altura
3. Alturas directamente situándonos a 20-25-30 m de distancia
4. Altura directriz

5. Medir directamente la altura mórfica
6. Área basimétrica por hectárea
7. N° de pies por hectárea
8. Volumen por hectárea
9. Altura total y media por hectárea
10. Altura media de Lorey
11. Pendiente del terreno
12. Cubicación de un árbol por trozas

Se trata de un pequeño aparato provisto de un visor para el lanzamiento de visuales, las cuales quedarán definidas sobre una línea de puntería interna, sobre la que oscilan un conjunto de escalas unidas a un péndulo. El péndulo puede ser liberado o fijado en el momento de realizar lecturas presionando un botón.

9.3.2. DESCRIPCIÓN DE LAS BANDAS DEL RELASCOPIO

Si lanzamos una visual a través del visor del relascopio podremos observar un campo visual totalmente circular enfrente de nosotros. Este campo circular está dividido en dos sectores iguales (semicírculos) por una línea de puntería horizontal (línea de lectura). El semicírculo superior es transparente y sirve para observar directamente desde el relascopio la masa exterior. Sin embargo, el semicírculo inferior es opaco y en él vienen delimitadas las bandas o escalas de medición del relascopio (figura 9.4):

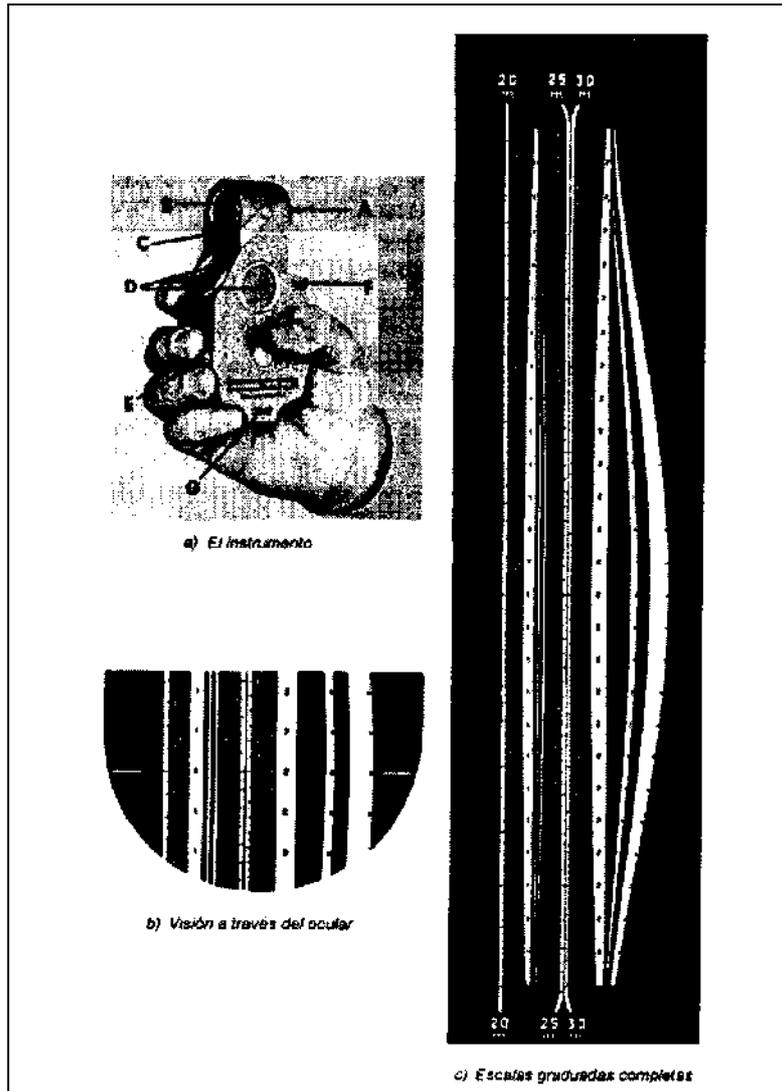


Figura 9.4. Relascopio, visión del ocular y escalas graduadas (bandas)
(tomado de Pardé, 1.994)

Las escalas forman un conjunto de bandas blancas y negras siendo posible distinguir dos tipos de ellas:

1. Bandas de anchura constante. Son las bandas de la izquierda y dos contiguas del centro. Estas bandas servirán para medir alturas a distancias de 20, 25 y 30 de distancia horizontal, de modo que se usará el aparato como cualquier otro hipsómetro.
2. Bandas de anchura variable. La anchura disminuye en ambos sentidos hacia sus extremos. Si estamos en terreno horizontal, la visual justo por la línea de puntería ofrecerá la mayor anchura de estas bandas, disminuyendo la anchura según vayamos lanzando nuevas visuales con una mayor pendiente. Estas bandas están específicamente diseñadas para su autocorrección en función de la pendiente.

La disminución en la anchura de las bandas es consecuencia de la compensación del alargamiento de las visuales inclinadas, de manera que siempre se mantiene constante la relación entre el ancho de banda (m) y la distancia al ocular (n), con respecto a la relación entre el diámetro del árbol interceptado (D) y la distancia en proyección horizontal (R) a la que se encuentra dicho pie (figura 9.5):

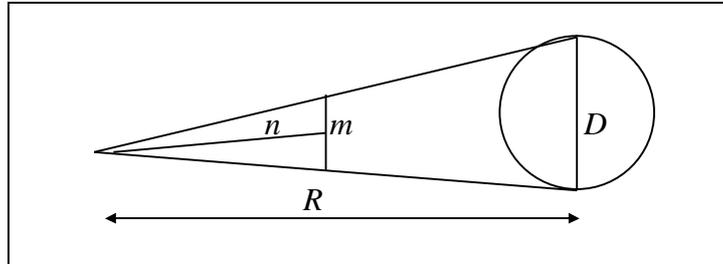


Figura 9.5. Relación entre ancho de banda, distancia ocular, diámetro del árbol y distancia en proyección horizontal

$$\frac{m}{n} = \frac{D}{R}$$

Además se cumple que esta relación debe ser igual al cociente entre el número de bandas de $\frac{1}{4}$ con que se interceptan los diámetros visados y 200:

$$\frac{m}{n} = \frac{D}{R} = \frac{n}{200}$$

La relación anterior puede particularizarse para cada una de las bandas del relascopio:

Banda de los unos ($n=4$): $\frac{m}{n} = \frac{4}{200} = \frac{1}{50}$

Banda de los cuartos ($n=4$): $\frac{m}{n} = \frac{1}{50}$

Banda de $\frac{1}{4}$ ($n=1$): $\frac{m}{n} = \frac{1}{200}$

Banda de los doses: su espesor es $\sqrt{2}$ veces la de los unos ($n=4\sqrt{2}$); $\frac{m}{n} = \frac{\sqrt{2}}{50}$

Banda del tres: $n=4\sqrt{3}$; $\frac{m}{n} = \frac{\sqrt{3}}{50}$

Banda del cuatro: ($n=8$); $\frac{m}{n} = \frac{1}{25}$

9.3.3. RELACIÓN ENTRE BANDA Y BAF

La banda viene caracterizada por su abertura α , ó bien por las magnitudes m y n (figura 9.6):

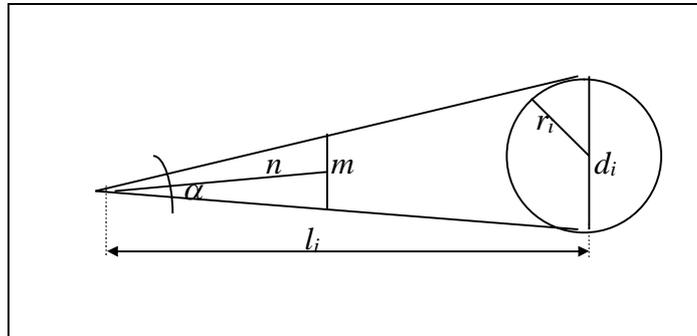


Figura 9.6. Relación entre banda y BAF

Ya vimos por definición que el BAF podía calcularse como:

$$BAF = \frac{10^4}{K^2} = \frac{10^4}{\left(\frac{1}{\text{sen} \frac{\alpha}{2}}\right)^2} = \text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \times 10^4$$

$$K = \frac{1}{\text{sen} \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\frac{r_i}{l_i}} = \frac{l_i}{r_i} = \frac{2l_i}{d_i}$$

Normalmente se eligen BAF sencillos (números enteros o fraccionarios fáciles de recordar). Por ello, hay que elegir la relación m / n más apropiada.

- Banda de unos, **BAF = 1**

$$BAF = 1 = \frac{10^4}{K^2}; \quad K^2 = 10^4; \quad K = 100$$

$$K = \frac{2l_i}{d_i} = \frac{2n}{m} = 100; \quad \frac{n}{m} = 50; \quad \frac{m}{n} = \frac{1}{50}$$

- Banda de cuartos, **BAF = 1/16**

$$\frac{m}{n} = \frac{d_i}{l_i} = \frac{1}{200}; \quad \frac{l_i}{d_i} = 200; \quad K = \frac{2l_i}{d_i} = 400$$

$$BAF = \frac{10^4}{K^2} = \frac{10^4}{(400)^2} = \frac{10^4}{16 \times 10^4} = \frac{1}{16}$$

- Banda del dos, **BAF = 2**

$$BAF = 2 = \frac{10^4}{K^2} = \frac{10^4}{\left(\frac{2l_i}{d_i}\right)^2} = \frac{10^4}{4} \left(\frac{d_i}{l_i}\right)^2; \quad \frac{d_i}{l_i} = \sqrt{\frac{2 \times 4}{10^4}} = \sqrt{\frac{2}{2500}} = \frac{\sqrt{2}}{50} = \frac{m}{n}$$

- Banda del tres, **BAF = 3**

$$BAF = 3 = \frac{10^4}{K^2} = \frac{10^4}{4} \left(\frac{d_i}{l_i}\right)^2 = \frac{10^4}{4} \left(\frac{m}{n}\right)^2; \quad \frac{d_i}{l_i} = \sqrt{\frac{3 \times 4}{10^4}} = \sqrt{\frac{3}{2500}} = \frac{\sqrt{3}}{50}$$

- Banda del cuatro, **BAF = 4**

$$BAF = 4 = \frac{10^4}{K^2} = \frac{10^4}{4} \left(\frac{d_i}{l_i}\right)^2; \quad \frac{d_i}{l_i} = \sqrt{\frac{4^2}{10^4}} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25} = \frac{m}{n}$$

9. 3.4. MEDICIÓN DE DISTANCIAS HORIZONTALES

a. Situándonos exactamente a 15, 20, 25, 30 m utilizando una base vertical de 2 m

La utilización del relascopio junto con una mira plegable de 2 m de longitud, nos permite situarnos a 15, 20, 25 y 30 m de distancia horizontal. Para ello, se coloca la mira en el tronco del árbol clavándola en la corteza, valiéndonos del punzón que ésta dispone en el extremo superior. Nos situaremos entonces a una distancia aproximada a la que queremos medir.

Con las escalas del relascopio liberadas (botón presionado), dirigiremos una visual hacia el árbol paralela al terreno. Mantendremos la visual y, cuando la oscilación de las bandas haya cesado, dejaremos de presionar el botón. Mediante ésta operación habremos efectuado el proceso de corrección de la pendiente. Giraremos entonces el aparato 90° en sentido contrario a las agujas del reloj, apareciendo la línea de lectura en posición vertical.

En ese momento, avanzaremos o retrocederemos nuestra posición hasta conseguir que la mira quede comprendida entre el borde inferior de la banda del dos (inmediatamente por encima de la palabra UNTEN) y el borde superior de la banda de la distancia elegida. En el ejemplo de la figura estaríamos situados a 20 m en proyección horizontal del árbol sobre el que se encuentra la mira.

La distancia a la que nos hemos situado siguiendo este procedimiento con el relascopio, nos dará directamente la distancia en proyección horizontal sin que sea necesario ningún otro tipo de corrección en función de la pendiente.

En principio, mediante la utilización del relascopio y la mira sólo podremos situarnos a las distancias de 15, 20, 25 y 30 m, pero si seguimos todo el proceso señalado anteriormente utilizando, en lugar de toda la longitud de la mira, únicamente la mitad, podremos situarnos a la mitad de las distancias correspondientes, es decir, a 7.5, 10, 12.5 y 15 m respectivamente.

b. Situándonos a cualquier distancia utilizando como base una forcípula

Si elegimos previamente una banda (por ejemplo la del cuarto), y sabemos la relación $\frac{m}{n} = \frac{d}{l}$, se puede determinar cualquier distancia horizontal simplemente colocando la abertura de la forcípula en la magnitud que nos indique la fórmula.

Así por ejemplo, si queremos situarnos a una distancia de 25 m en proyección horizontal y hemos elegido la banda del cuatro ($\frac{m}{n} = \frac{1}{25}$), la abertura de la forcípula deberá ser:

$$d = \frac{m}{n} \times l = \frac{1}{25} \times 25 = 1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$$

Por tanto, cuando esta abertura de forcípula sea enrasada tangencialmente por la banda del cuatro estaremos exactamente a una distancia horizontal de 25 m.

9.3.5. MEDICIÓN DE DIÁMETROS

Para medir diámetros nos basaremos en la expresión anterior ($\frac{m}{n} = \frac{d}{l}$), y situándonos a una distancia prefijada (horizontal) podremos medir el diámetro a cualquier altura del árbol.

Para ello, habiéndonos situado a la distancia conocida (l) y cubriendo de la forma más exacta posible la sección del árbol deseada, con una o varias bandas de cuartos (a veces utilizando también la banda de los unos en combinación con la de cuartos) obtendremos el valor del diámetro:

$$d = \frac{m}{n} \times l$$

Siendo: $\frac{m}{n}$: relación de la banda utilizada para cubrir la sección deseada

l : distancia horizontal conocida a la cual nos hemos situado

d : diámetro del árbol en la sección medida

9.3.6. MEDICIÓN DE ALTURAS

Una de las grandes utilidades del relascopio es la medición de la altura directriz. Ya se vio la manera de cubicar un pie mediante la fórmula de Pressler – Bitterlich, demostrándose que para tipos dendrométricos cono, paraboloides y

neiloide, el volumen hallado coincide con el de la fórmula teórica de tipos dendrométricos:

$$V = \frac{S_0 h}{n+1} = \frac{2}{3} S_0 \times h_t$$

El procedimiento a seguir para determinar la altura directriz (*Richtpunkt*) es el siguiente:

1. Nos situaremos a una distancia tal que el diámetro normal del árbol sea cubierto exactamente por la banda del cuatro (una banda de unos más cuatro de cuartos).

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{50} + \frac{1}{50} = \frac{1}{25} = \frac{d_n}{R} \quad R = 25 d_n$$

R : distancia al árbol, desconocida, pero que se puede conocer con la expresión anterior

2. Sin movernos del sitio, iremos subiendo la visual a lo largo del tronco (soltando el péndulo del relascopio) hasta que una sección concreta sea cubierta exactamente por la banda de unos. Ésta sección será la que posee un diámetro igual a la mitad del diámetro normal
3. Después sería preciso conocer la altura de ésta sección (h_t), pero no podremos medirla directamente a una escala, ya que sólo existe la escala del 20, 25 y 30, y probablemente estemos a una distancia distinta de éstas. No obstante, al igual que vimos cuando estudiamos el Blume – Leiss, para hallar la altura real de un árbol cuando estábamos situados a una distancia distinta de las anteriores, pero conocida, lo que se hacía era leer la altura en una de las escalas anteriores (sería entonces una lectura ficticia de la altura que no corresponde con la distancia real) y corregirla con un factor.

$$\frac{h_t}{h_t'} = \frac{R}{R'}; \quad h_t = h_t' \times \frac{R}{R'}$$

Siendo: R : distancia real = 25 d_n
 R' : 20, 25 ó 30 m. dependiendo de donde se halla leído la altura
 h_t' : altura directriz ficticia leída en una de las escalas anteriores
 h_t : altura real directriz

En nuestro caso concreto, como hemos elegido la banda del cuatro que hace que $R = 25 d_n$ nos interesa (para simplificar) leer la altura directriz ficticia en la escala de 25 m.

$$h_I = h_I' \frac{25 \times d_n}{25} = h_I' \times d_n$$

El volumen aplicando la fórmula de PRESSLER – BITTERLICH (1959) será:

$$V = \frac{2}{3} \times \frac{\pi}{4} d_n^2 h_I = \frac{2}{3} \times \frac{\pi}{4} d_n^2 d_n h_I' = \frac{2}{3} \times \frac{\pi}{4} d_n^3 h_I'$$

$$V = \frac{\pi}{4} d_n^2 hf = \frac{2}{3} \times \frac{\pi}{4} d_n^3 h_I'$$

Y la altura mórfica:

$$\frac{hf}{d_n} = \frac{2}{3} h_I'$$

$$hf = \frac{2}{3} d_n h_I'$$

Nota: para determinar de forma práctica la altura directriz también puede utilizarse una banda de unos más dos de cuartos ó cuatro bandas de cuartos. Los coeficientes de las fórmulas anteriores serían distintos, pero la filosofía de cálculo sería la misma.

9. 3.7. MEDICIÓN DE PENDIENTES

Se pueden utilizar las tres escalas de alturas (20, 25 ó 30) para dar las pendientes en tanto por uno.

9.4. FASES EN LA REALIZACIÓN DE UN MUESTREO RELASCÓPICO

Las fases a seguir para llevar a cabo el muestreo angular horizontal son las siguientes:

1. Elección del número de estacionamientos a realizar en el monte, cuartel, cantón o rodal

- Procedimiento A. Mediante la teoría del muestreo aleatorio:

$$n = \frac{t^2 S^2}{\varepsilon^2} = \frac{t^2 (CV)^2}{(\varepsilon_r(\%))^2}$$

Siendo:

n : número de estacionamientos

t : estadístico t – student

S^2 : varianza del parámetro en cuestión

CV : coeficiente de variación, $\frac{S}{\bar{x}} \times 100$

ε : error del parámetro (por ha)

$\varepsilon_r(\%)$: error aleatorio, $\frac{\varepsilon}{\bar{x}} \times 100$

- Procedimiento B. Mediante fórmula empírica de Bitterlich:

- Si $A < 5$ ha..... $n = 2\sqrt{BAF} \times A$

- Si $A \geq 5$ ha..... $n = 2\sqrt{BAF} \times \frac{5^{\log A}}{\log A}$

Siendo: A : superficie (ha) de la unidad inventarial

BAF : es el BAF medio a utilizar en la unidad inventarial

2. BAF a elegir en cada estacionamiento

Elegir el BAF es sinónimo de elegir la banda para realizar el conteo angular. Ésta elección se hace en función de las características del monte y del grado de precisión exigido.

- Según la precisión, la cantidad de pies que deben entrar en el conteo:

- Masas claras..... 15 – 20 pies

- Masas densas..... 25 – 30 pies

- Según las características del monte, y para cumplir el requisito anterior:

- A mayor diámetro, mayor banda a elegir

- Cuanto más próximo está el arbolado al conteo del estacionamiento, mayor banda a elegir

3. **Seleccionada la banda hay que realizar el conteo angular.** Con el criterio conocido, se cuentan los árboles que entran y, en su caso, se clasifican por clases diamétricas.

4. **En cada estacionamiento "i" conoceremos los parámetros de masa:** número de pies por ha, área basimétrica por ha y, en ambos casos, su distribución por clases diamétricas:

$$G_i = BAF_i \times \sum_{j=1}^n z_j = BAF_i \times z_i$$

Siendo: i : nº de estacionamientos
 j : clase diamétrica

Por tanto, una estimación del área basimétrica media por ha en la unidad inventarial sería:

$$\bar{G} = \frac{\sum_{i=1}^p G_i}{p}$$

El error cometido en dicha estimación es:

$$\bar{G} \pm tS_{\bar{G}}; \quad \text{siendo } S_{\bar{G}} = \sqrt{\frac{S_G^2}{p}}$$

La estimación del número de pies por ha será:

$$N_i = BAF_i \times \sum_{j=1}^n \frac{z_j}{g_j}$$

El valor medio de pies/ha para todo el monte:

$$\bar{N} = \frac{\sum_{i=1}^p N_i}{p}$$

Y el error cometido en dicha estimación:

$$\bar{N} \pm tS_{\bar{N}}; \quad \text{con } S_{\bar{N}} = \sqrt{\frac{S_N^2}{p}}$$

9.5. OTRAS APLICACIONES DEL RELASCOPIO. MUESTREO ANGULAR VERTICAL

Utilizando el mismo criterio de la parcela móvil pero aplicado a un plano vertical, se realiza el denominado *muestreo angular vertical*. Así, si seleccionamos con un ángulo constante (θ) los árboles cuya altura sea superior a las visuales desde esa abertura, se puede calcular la denominada *altura de Hirata* (HIRATA, 1955; BITTERLICH, 1955 y 1984; HELLRIGL, 1960). Esta altura es un estimador de la altura media cuadrática de la masa (figura 9.6).

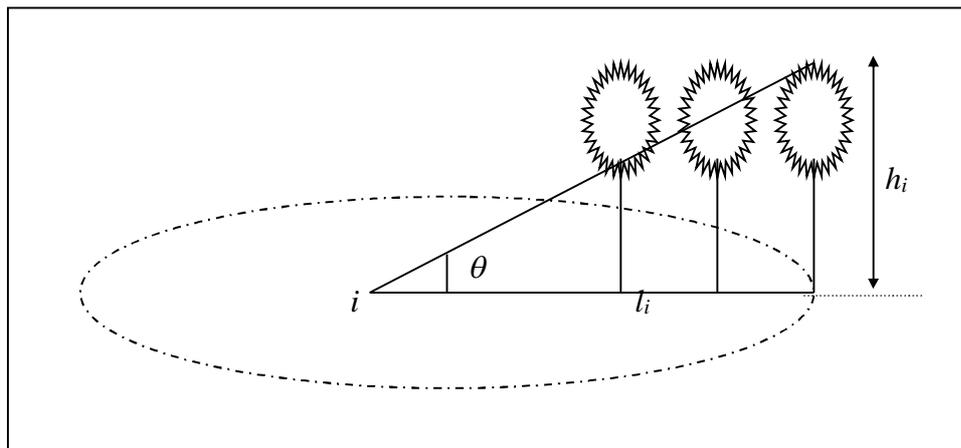


Figura 9.6. Muestreo angular vertical. Cálculo de la altura de Hirata (1955)

Una vez fijado el calibre angular (θ) se contarán en el muestreo angular vertical todos los árboles de tamaño $\geq h_i$, siempre que estén a una distancia $\leq l_i$ del punto de estacionamiento i . Siguiendo la misma filosofía que utilizamos para deducir las expresiones del área basimétrica por ha mediante conteo angular, se demostrará como válida la siguiente expresión:

$$S = BAF^I \times z$$

Siendo:

z : nº de pies contabilizados con el criterio anterior

S : suma de las superficies del círculo hipotético de diámetro igual a su altura

La superficie del círculo hipotético del muestreo angular vertical será:

$$S = \sum \frac{\pi}{4} h_i^2$$

BAF^I es el factor de proporcionalidad del muestreo angular vertical; difiere del BAF considerado para áreas basimétricas.

Deducción de la expresión del BAF' (figura 9.7):

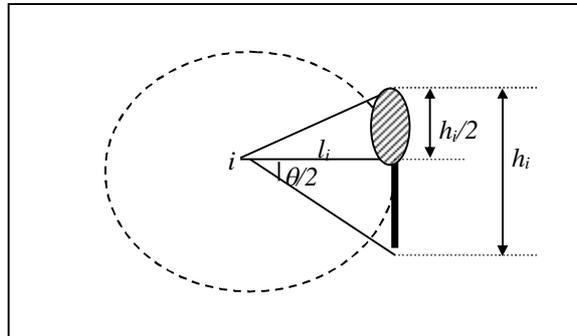


Figura 9.7. Factores de cálculo en el muestreo angular vertical

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{h_i}{l_i}$$

$$l_i = \frac{h_i}{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)} = K' \times h_i$$

$$X_i = \frac{\sum_{i=1}^{z_i} x_i}{\frac{\pi l_i^2}{10^4}} = \frac{10^4}{\pi l_i^2} \sum x_i = \frac{10^4}{\pi h_i^2 \left(2 \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2} \sum x_i = \frac{10^4 \left(2 \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2}{4} \frac{\sum x_i}{\pi \left(\frac{h_i}{2}\right)^2}$$

$$X_i = BAF' \frac{\sum x_i}{\pi \left(\frac{h_i}{2}\right)^2}$$

- Para todas las clases de alturas: $X = BAF' \sum \sum \frac{x_{ij}}{\pi \left(\frac{h_i}{2}\right)^2}$
- Si $x_{ij} = \pi \left(\frac{h_i}{2}\right)^2 z_j \Rightarrow S = BAF' \sum_{j=1}^n z_j = BAF' z$

$$\text{Entonces } BAF' = \frac{10^4 \times K^2}{4} \Rightarrow K = 2 \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Visto esto vamos a obtener la expresión que permite calcular la altura de Hirata:

$$S = BAF' z = \frac{\pi}{4} \sum_{i=1}^n h_i^2$$

$$S = BAF' z = \frac{\pi}{4} \sum_{i=1}^n f_i h_i^2$$

Siendo: n : nº de clases diamétricas
 N : nº de pies por ha
 f_i : frecuencia de la clase diamétrica

Dividiendo ambos términos de la igualdad por N obtendremos la sección media (S_m)

$$h_m^2 = \frac{\sum h_i^2}{N} \quad \text{que es la altura media cuadrática o altura de Hirata}$$

La relación entre la altura de Hirata y la sección media es:

$$S_m = \frac{BAF' \times z}{N} = \frac{\pi}{4} \times \frac{\sum h_i^2}{N} = \frac{\pi}{4} h_m^2$$

$$h_m = \sqrt{\frac{4 \times BAF' \times z}{\pi N}} = \sqrt{\frac{4 \times \frac{10^4 \times K^2}{4} \times z}{\pi N}} = \sqrt{\frac{4 \times 2^2 \times \text{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \times z}{\pi N}}$$

Finalmente
$$h_m = 200 \sqrt{\frac{\text{tag}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \times z}{\pi N}}$$

Normalmente, la forma de generar el ángulo constante es mediante la escala de alturas de 25 m del relascopio, fijando una lectura total de h metros. Por ejemplo, si $h = 62,7$ entonces:

$$\text{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{62,7}{25} = 1,254$$

$$K = 2 \text{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2,508$$

$$BAF' = \frac{10^4 \times K^2}{4} = 15.725,16$$

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- BITTERLICH, W. (1955). *Was ist die Hirata-Höhe?* AFZ, Wien
- BITTERLICH, W. (1959). *Pressler Richthöhe in neuem Licht*. Allgemeine Forstzeitung n° 5/6, pp. 47-49
- BITTERLICH, W. (1984). *The relascope idea: relative measurements in forestry*. Norwich (Inglaterra): Commonwealth Agricultural Bureaux
- HELLRIGL, B. (1960). *Una nuova teoria dendrometrica: la relaskopia*. Edda
- HIRATA, T. (1955). Height estimation through Bitterlich's methods, vertical angle count sampling. Jp. Journal Forestry 37: pp 479-480
- PARDE, J. and BOUCHON, J. (1994). *Dasometría*. Versión española de Dendrométrie. Traducido por Prieto Rodríguez, A. y López Quero, M. Ecoly Nationale des Eaux et Forêts (ENGREF). Nancy (Francia). Madrid: Edit. Paraninfo.

TEMA 10. INTRODUCCIÓN A LA EPIDOMETRÍA. CRECIMIENTO DEL ÁRBOL

- I. INTRODUCCIÓN: DEFINICIÓN DE EPIDOMETRÍA, FACTORES DE LOS QUE DEPENDE EL CRECIMIENTO, DESARROLLO Y EDAD DEL ÁRBOL
 - II. DISTINTOS CONCEPTOS DE CRECIMIENTO: CRECIMIENTOS ABSOLUTOS Y CRECIMIENTOS RELATIVOS A INTERÉS SIMPLE Y COMPUESTO
 - III. CARACTERÍSTICAS DEL CRECIMIENTO EN DIÁMETRO, ÁREA BASIMÉTRICA, ALTURA Y VOLUMEN
 - IV. CÁLCULO DEL CRECIMIENTO EN DIÁMETRO NORMAL Y ÁREA BASIMÉTRICA
 - V. CÁLCULO DEL CRECIMIENTO EN ALTURA
 - VI. CÁLCULO DEL CRECIMIENTO EN VOLUMEN
-

10.1. INTRODUCCIÓN: DEFINICIÓN DE EPIDOMETRÍA, FACTORES DE LOS QUE DEPENDE EL CRECIMIENTO, DESARROLLO Y EDAD DEL ÁRBOL

La **Epidometría** es la ciencia que se ocupa de las leyes de medición, del crecimiento y la producción de los árboles y de las masas forestales. Hasta ahora hemos estudiado al árbol y a la masa forestal en su aspecto estático, definiendo métricamente a un pie o a un conjunto de pies en un determinado instante de su desarrollo. En este tema intentaremos abordar los parámetros dasométricos desde una perspectiva temporal.

Es interesante medir el crecimiento ya sea del árbol o de la masa forestal por las siguientes razones:

- a. El crecimiento es un estimador de la calidad de estación
- b. Con el crecimiento es posible predecir el estado futuro de una masa forestal
- c. El crecimiento indica la cantidad de madera que se podría extraer de un monte (interviene en las fórmulas de la posibilidad en ordenación de montes)
- d. El crecimiento es un valioso parámetro a tener en cuenta en la planificación de recursos tanto a nivel regional como local (monte)

El crecimiento del árbol es consecuencia directa del paso del tiempo, pero también depende de los siguientes factores:

1. De la especie, pues su genética determina la velocidad de crecimiento (especies de crecimiento lento, especies de crecimiento rápido...)
2. De la calidad de estación: a mejores calidades para una especie, mejores crecimientos
3. De la espesura: una mayor competencia en principio implica menores crecimientos globales
4. De los tratamientos selvícolas de la masa: pueden propiciar un mayor crecimiento de uno o varios parámetros del árbol o de la masa

Estos cuatro factores determinan la evolución del árbol en el tiempo y modelizar la situación real en un determinado instante es ciertamente muy complicado. Para ello, supondremos algunos de los factores constantes para poder predecir de manera más sencilla su comportamiento temporal.

Crecimiento del árbol

En el ambiente mediterráneo el crecimiento del árbol tiene lugar en una época determinada, durante el denominado periodo vegetativo, que se caracteriza por unas buenas condiciones de temperatura y humedad en el suelo que permiten al vegetal la multiplicación de sus células y la generación de nuevas tejidos.

El crecimiento del árbol es algo que puede ser observado comprobando la variación del diámetro y de su altura con el tiempo. El crecimiento en altura es debido principalmente a la actividad de los tejidos meristemáticos primarios localizados en la guía principal. Este crecimiento es visible anualmente observando las denominadas *metidas*. Una *metida* en el crecimiento del árbol es aquel incremento (en altura y grosor) en el que aparece un verticilo anualmente. Es posible, sobre todo en los pies más jóvenes, estimar la edad contando los nudos de la inserción de las ramas.

Por otra parte, el árbol también crece en grosor, tanto en el tronco principal como en las ramas, debido a la acción de los tejidos meristemáticos secundarios del cambium. Al ir creciendo el árbol los meristemas generan xilema hacia dentro (madera) y floema hacia fuera (corteza). El crecimiento en grosor dará lugar a los anillos de crecimiento, que aparecen reflejados en cualquier sección transversal del tronco del árbol. En países mediterráneos no obstante, es posible encontrar en algunas especies 2 anillos de crecimiento por año, debido por ejemplo a que una distribución irregular de precipitaciones genere dos crecimientos en un mismo período. También es posible que desaparezcan los anillos de un año debido a la proliferación de una enfermedad, un fuerte ataque de plagas o a una intensa sequía durante ese año.

Si representamos la variación de un parámetro de un árbol con el tiempo, veremos que la función así generada tiene en principio la forma de una función logística o sigmoide. Estas funciones se representan llevando en ordenadas la magnitud de la variable en cuestión, y en abscisas una escala temporal apropiada al período de crecimiento considerado. En la curva sigmoideal pueden diferenciarse tres períodos de crecimiento (figura 10.1):

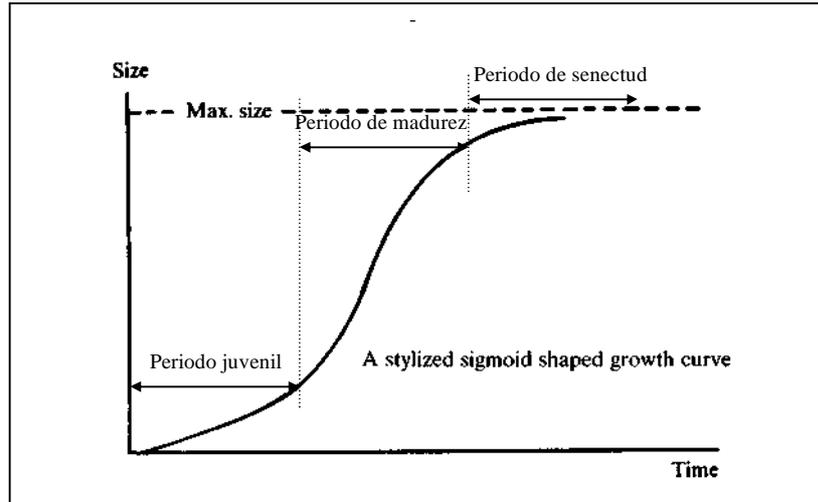


Figura 10.1. Sigmoide y periodos de crecimiento (tomado de PHILIP, 1994)

1. Período juvenil: en él el crecimiento es acelerado
2. Período de madurez: el crecimiento se muestra sensiblemente lineal
3. Período de senectud: se produce la culminación asintótica de la variable considerada, el crecimiento se ralentiza notablemente

El modelo sigmoide no admite un ajuste por mínimos cuadrados. Para definirlo se aplicarán los modelos no lineales.

Es importante también conocer la edad de un árbol para estudiar su crecimiento a lo largo de toda su vida. La edad de un pie se puede saber por distintos métodos:

1. Por la fecha de plantación del árbol, si se tuviera
2. Por conteo de entrenudos. Es válido para árboles jóvenes
3. Por conteo de los anillos del tocón. Este método supone cortar el árbol; para contar con precisión los anillos se puede lijar o tinter el tocón con productos especiales
4. Por conteo de los anillos en un bastoncito Pressler. Ello no implica cortar el árbol

10.2. DISTINTOS CONCEPTOS DEL CRECIMIENTO: CRECIMIENTOS ABSOLUTOS Y CRECIMIENTOS RELATIVOS A INTERÉS SIMPLE Y COMPUESTO

10.2.1. CRECIMIENTOS ABSOLUTOS

La producción total se puede referir a la unidad de tiempo dando lugar a las siguientes definiciones:

- **Crecimiento medio anual (CMA).** Es el volumen medio de madera producido anualmente:

$$C.M.A. = \frac{V(m^3)}{E(años)}$$

Siendo: V : volumen total
 E : edad

- **Crecimiento periódico (CP)**. Se trata del cambio de volumen a lo largo de un período p de años:

$$C.P. = V_2 - V_1$$

Siendo: V_1 : Volumen inicial del período
 V_2 : Volumen final del período

- **Crecimiento anual (CA)**. Es el incremento de volumen de un año ($p = 1$):

$$C.A. = V_t - V_{t-1}$$

Siendo: V_t : Volumen en el año t
 V_{t-1} : Volumen en el año anterior

- **Crecimiento corriente anual (CCA)**. Refleja la evaluación del volumen en dos momentos distintos y sería un estimador del crecimiento futuro:

$$CC = \frac{V_2 - V_1}{p}$$

Siendo: V_1 : Volumen inicial del período
 V_2 : Volumen final del período
 p : período de años

Gráficamente, el crecimiento medio anual a una determinada edad se corresponde con la pendiente de la recta que une el punto de la curva de crecimiento en esa edad con el origen de coordenadas (figura 10.2):

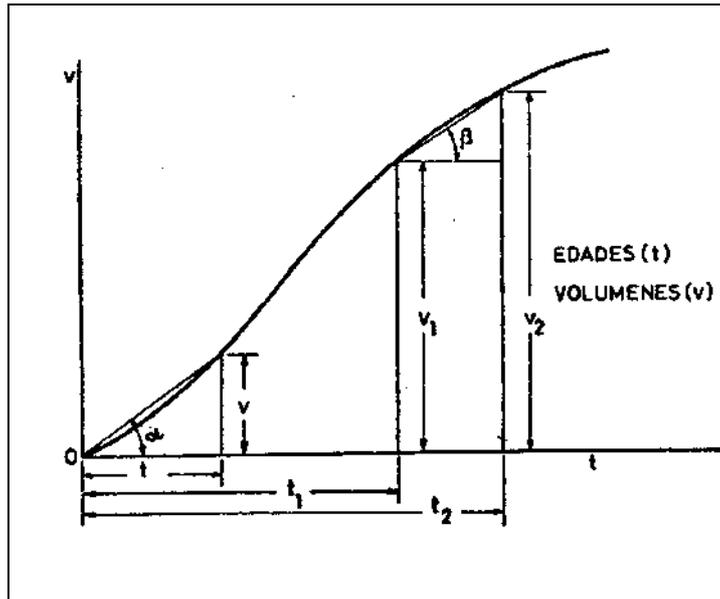


Figura 10.2. Curva de crecimiento: definición de crecimiento medio anual y crecimiento corriente anual (tomado de PITA, 1979)

$$CMA = \frac{v}{t} = \operatorname{tg} \alpha$$

A su vez, el crecimiento corriente anual (CCA) correspondiente a un periodo p comprendido entre los momentos t_1 y t_2 vendrá dado por la pendiente de la recta que une estos dos puntos de la sigmoide (figura 10.2):

$$CCA = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v_2 - v_1}{p} = \operatorname{tg} \beta$$

Considerando p lo suficientemente pequeños tendremos que en el límite la pendiente de la recta que une los dos puntos t_1 y t_2 que definen el crecimiento, coincidirá con la tangente a la curva, y por tanto, con la derivada de la función de crecimiento $V = f(t)$ en dicho punto.

Otra definición aportada por la bibliografía forestal es la de **rendimiento**, que no es sino la representación de la variable de interés en función de la edad, generándose la curva de desarrollo o curva de rendimiento, con la forma sigmoide ya sabida. Entre la curva de rendimiento y la de crecimiento existe una sencilla relación, y es que la dimensión total de la variable de interés alcanzada en un determinado momento (rendimiento) es igual al sumatorio de todos los crecimientos anuales. Por tanto la curva de rendimiento es la curva acumulativa de la curva de crecimiento (figura 10.3):

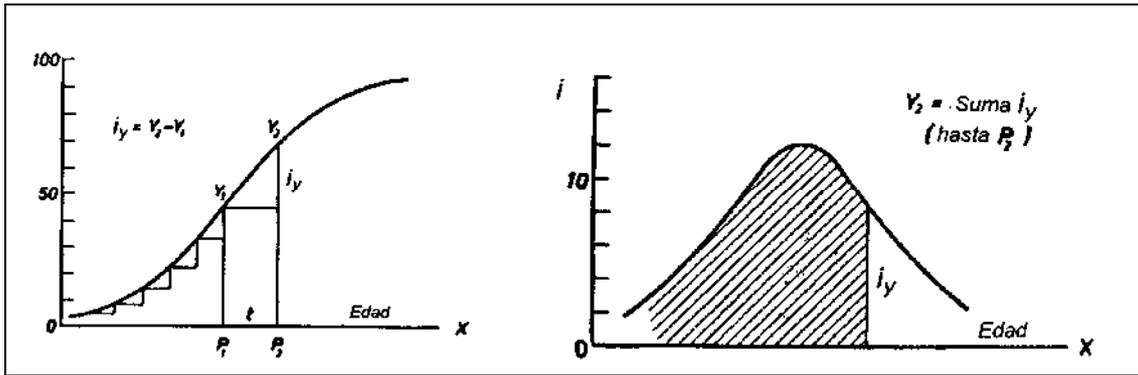


Figura 10.3. Relación entre crecimiento corriente anual y curva de rendimiento i : crecimiento anual (tomado de PRODAN, 1951)

Entonces la curva de crecimiento será la curva de diferencias de la curva de rendimiento; la función de rendimiento será la integral definida de la función de crecimiento y por el contrario, la función de crecimiento la derivada de la función de rendimiento (PRODAN, 1951).

Particularizando para el volumen como variable de interés tendríamos que:

$$V = F(t)$$

$$F(t) = \int_0^t i_v \times dt$$

$$V = \int_0^t f(t) \times dt$$

$$\boxed{i_v = f(t) = F'(t)}$$

Una vez se tenga el modelo matemático que genera la sigmoide resultaría fácil deducir las curvas del crecimiento medio y de crecimiento corriente anual con el tiempo. La curva del crecimiento corriente anual sube rápidamente siguiendo la recta tangente a la curva de desarrollo, alcanzando el máximo en el punto de inflexión de la sigmoide. Desde el máximo se produce un decrecimiento constante, cortándose con la curva de crecimiento medio en el punto de culminación de ésta. La curva de crecimiento medio evoluciona más lentamente por el efecto acumulativo de los diferentes crecimientos anuales (figura 10.4).

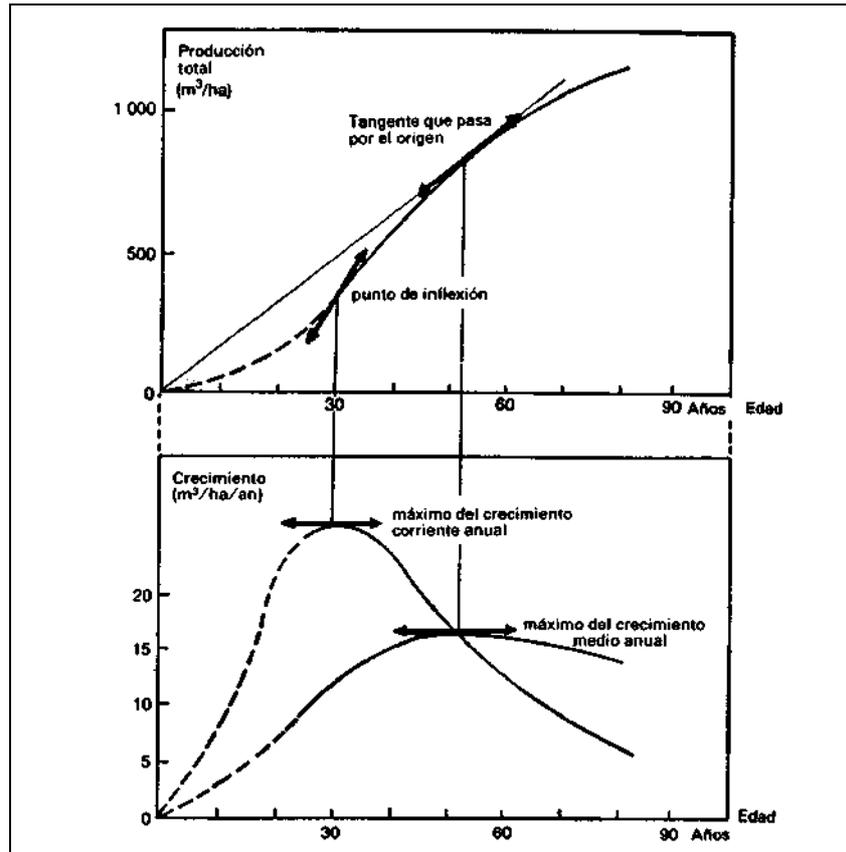


Figura 10.4. Relación entre crecimiento medio anual y crecimiento corriente anual (PARDÉ, 1994)

Las definiciones matemáticas vistas permiten demostrar esta importante propiedad de coincidencia entre los crecimientos corriente y medio anual en el momento de máxima culminación de éste (MULLER, 1920). Así para una curva de crecimiento de expresión $V = f(t)$ tendremos que el crecimiento medio (i_m) a una edad t será:

$$i_m = \frac{v}{t} = \frac{f(t)}{t}$$

El máximo de esta expresión del crecimiento se producirá a una edad t_{max} para la cual es nula la primera derivada:

$$\frac{d i_m}{d t} = \frac{t f'(t) - f(t)}{t^2} = 0 ; t = t_{max}$$

$$t_{max} \times f'(t_{max}) = f(t_{max})$$

$$f'(t_{max}) = \frac{f(t_{max})}{t_{max}}$$

Por tanto a la edad de t_{max} ambos crecimientos coinciden.

Esta propiedad puede ser demostrada mediante otro método (HEYER, 1883). Así, si expresamos como i_1 y ima_1 al crecimiento corriente y al crecimiento medio respectivamente, para una edad $t_1=t_0+1$ y i_0 y ima_0 al crecimiento corriente y al crecimiento medio respectivamente, para una edad t_0 , entonces se puede calcular el crecimiento corriente i_1 como la diferencia entre el crecimiento acumulado a la edad t_0+1 y t_0 (PRODAN, 1951):

$$\begin{aligned}i_1 &= ima_1(t_0 + 1) - t_0 \times ima_0 \\i_1 &= ima_1 t_0 + ima_0 - t_0 ima_1 = ima_1 + t_0(ima_1 - ima_0) \\i_1 &= ima_1 = t_0(ima_1 - ima_0)\end{aligned}$$

Por tanto, mientras que el crecimiento medio ima_1 de un año siguiente sea mayor que el del año anterior ima_0 , entonces el crecimiento corriente i_1 será mayor que el crecimiento medio ima_1 y viceversa.

La diferencia $i_1 - ima_1$ cambiará de signo en el mismo momento que la diferencia $ima_1 - ima_0$, luego $ima_1 = i_0$

Se podría concluir en el estudio de las curvas de crecimiento con los siguientes puntos:

1. El máximo de crecimiento corriente es siempre más elevado y se alcanza antes que el de crecimiento medio
2. Al producirse el máximo de la curva de crecimiento medio anual en el momento donde corta a la de crecimiento corriente anual, hay igualdad entre los dos crecimientos a esta edad, lo que corresponde al instante desde donde se puede trazar la tangente de la curva de la producción total que pasa por el origen de coordenadas
3. El máximo de crecimiento corriente corresponde al punto de inflexión de la curva representativa de la producción total
4. Se ha observado que los máximos de los crecimientos anuales corriente y medio en área basimétrica se obtienen aproximadamente a la misma edad que los volúmenes; por el contrario los máximos de los crecimientos en diámetro son más precoces

B. CRECIMIENTOS RELATIVOS

Los crecimientos relativos se definen para saber si un árbol o una masa ha crecido mucho o poco, e informan del porcentaje que significa el crecimiento respecto a un valor absoluto de referencia.

1. **Crecimiento relativo a interés simple.** Es aquel en el que no se tiene en cuenta la renta generada. Para su cálculo se supone que son conocidos los valores de la variable en el inventario inicial y final y que el crecimiento absoluto entre ambos valores se produce linealmente siguiente una ley de interés simple.

$$V_2 = V_1 \left(1 + \frac{n \times p}{100} \right)$$

n : período de años
 p : crecimiento relativo

Se utiliza la fórmula de interés simple para predecir el volumen en un futuro próximo, en etapas fuera del desarrollo juvenil. Si quisiéramos plantear el crecimiento relativo entre los volúmenes de los años 2.000 y 2.010 definiríamos la siguiente expresión:

$$V_{2010} = V_{2000} \left(1 + \frac{10 \times p}{100} \right)$$

A partir de la fórmula general se puede calcular el crecimiento relativo p :

$$p = \frac{100}{10} \times \left(\frac{V_{2010}}{V_{2000}} - 1 \right)$$

Según los valores de volumen y del período de referencia tomados se puede calcular el crecimiento relativo para las distintas etapas del crecimiento del árbol o de la masa.

- **Crecimiento sobre el valor inicial.** Válido para la etapa de juventud:

$$p = \frac{V_2 - V_1}{V_1} \times \frac{100}{n}$$

- **Crecimiento sobre el valor medio (fórmula de Pressler).** Válido para la etapa de madurez:

$$p = \frac{V_2 - V_1}{\frac{V_2 + V_1}{2}} \times \frac{100}{n}$$

- **Crecimiento sobre el valor final (fórmula de Breyman).** Válido para la etapa de senectud:

$$p = \frac{V_2 - V_1}{V_2} \times \frac{100}{n}$$

De las tres fórmulas anteriores, la fórmula de Pressler es la más empleada para describir el crecimiento relativo en el período que acaba de finalizar, mientras que la fórmula de Breyman sirve para predecir el crecimiento en un período futuro inmediato. Esto es debido a que el crecimiento relativo disminuye al aumentar el término de comparación con el denominador.

2. Crecimiento relativo a interés compuesto. Se supone que el incremento de la variable de la magnitud inicial a la final se produce mediante una razón incremental constante, mediante una ley de interés compuesto. En este crecimiento se tiene en cuenta la suma de los crecimientos de los años anteriores, tratándose por tanto de un crecimiento exponencial. La fórmula general que lo define es:

$$V_2 = V_1 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n$$

En función de ella se puede calcular el crecimiento:

$$p = \left(\sqrt[n]{\frac{V_2}{V_1}} - 1 \right) \times 100$$

D. Fernando Peña (citado en PITA, 1979) obtuvo una expresión simplificada de la fórmula anterior, mediante logaritmos y desarrollo en serie (es la denominada *fórmula de Peña*):

$$p = \frac{230}{n} \log \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

Ambas fórmulas dan resultados bastante parecidos, pero debido a ser fórmulas a interés compuesto únicamente son válidas para el período de crecimiento exponencial del árbol, es decir para el período juvenil.

10.3. CARACTERÍSTICAS DEL CRECIMIENTO EN DIÁMETRO, ÁREA BASIMÉTRICA, ALTURA Y VOLUMEN

Cada especie tiene una evolución del crecimiento de sus parámetros característico y a su vez, esos parámetros irán evolucionando unos respecto a los otros y respecto a la curva sigmoide de forma distinta. Por ser los parámetros más importantes en las mediciones forestales, indicaremos las características del crecimiento de los parámetros diámetro normal, área basimétrica, altura y volumen de la masa.

1. Crecimiento en diámetro normal

- Comienza a medirse a la altura de 1,30 m por lo que se inicia pronto la etapa juvenil
- La etapa de madurez es constante y no muy larga, en comparación con otros parámetros (punto de inflexión próximo al origen)
- La etapa de senectud también empieza pronto, se observa cuando la tasa de crecimiento disminuye, consecuencia de las características de crecimiento en sección normal

2. Crecimiento en sección normal (área basimétrica)

- La curva sigmoide inicia su crecimiento bruscamente a la vez que el diámetro normal y la etapa juvenil es corta
- Tiene un largo período de madurez. El crecimiento corriente permanece más o menos constante durante bastante tiempo, lo cual facilita las predicciones del crecimiento, además está muy relacionado con el crecimiento en volumen. Por ello se suele utilizar como parámetro muy interesante al hablar de la estructura de la masa. El crecimiento en área basimétrica es por definición:

$$\Delta g = g_2 - g_1 = \frac{\pi}{4}(d_2^2 - d_1^2) \text{ que se resolverá:}$$

1. Si se calcula como crecimiento anterior:

$$\Delta g = \frac{\pi}{4}[(d_1 + \Delta d)^2 - d_1^2] = \frac{\pi}{4}(2d_1\Delta d + \Delta d^2)$$

2. Si se calcula como crecimiento posterior

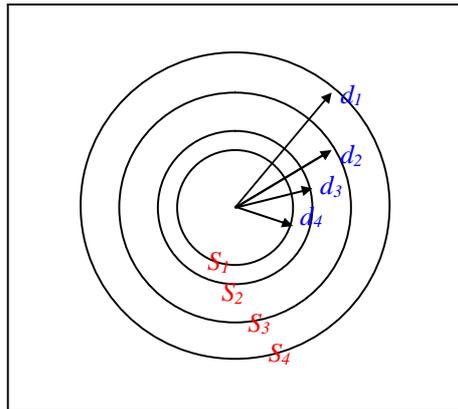
$$\Delta g = \frac{\pi}{4}[d_2^2 - (d_2 - \Delta d)^2] = \frac{\pi}{4}(2d_2\Delta d + \Delta d^2)$$

Se puede simplificar tomando $\Delta g \approx \frac{\pi}{2}d\Delta d$

El área basimétrica se medirá con dos diámetros: $d = \bar{d} = \frac{d_1 + d_2}{2}$

$$\frac{\Delta g}{g} \approx 2 \frac{\Delta d}{d}$$

$$p_g = \frac{\Delta g}{g} = 2p_d = 2 \frac{\Delta d}{d}$$



$$S_2 - S_1 = \Delta S = A \text{ (cte)}$$

$$d_2 - d_1 = B_1$$

$$S_3 - S_2 = \Delta S = A \text{ (cte)}$$

$$d_3 - d_2 = B_2$$

$$S_4 - S_3 = \Delta S = A \text{ (cte)}$$

$$d_4 - d_3 = B_3$$

3. Crecimiento en altura total

- Etapa juvenil corta al igual que el diámetro normal.
- Etapa de madurez más larga que en diámetro normal y no tanto como en sección normal.
- Etapa de senectud donde disminuye paulatinamente el crecimiento tendiendo a una asíntota.
- La altura es muy sensible al clima y la calidad de estación, por lo que se suele utilizar como indicador de la capacidad productiva de una estación.

4. Crecimiento en volumen

- Largo período juvenil, mucho más que todos los anteriores.
- Etapa de madurez también prolongada, hasta edades mucho mayores que en diámetro, sección o altura, lo cual, permite elegir distintas épocas de corta.

10.4. CÁLCULO DEL CRECIMIENTO EN DIÁMETRO NORMAL Y ÁREA BASIMÉTRICA

10.4.1. POR COMPARACIÓN DE INVENTARIOS

Se suponen conocidos los diámetros inicial, hace un determinado número de años (d_1) y actual (d_2) de un pie:

$$\Delta d = d_2 - d_1$$

Se podrá utilizar este procedimiento para estimar el crecimiento tanto en diámetro con corteza como sin corteza.

10.4.2. MEDIANTE INVENTARIO ÚNICO

1. Conteo de anillos en bastoncitos Pressler

En un árbol en pie es posible extraer mediante la barrena de *Pressler* un bastoncillo en el que se podrá contar el número de anillos de crecimiento. Si la barrena no penetra hasta el centro del tronco, sólo será posible observar los últimos crecimientos habidos en el árbol (figura 10.5):

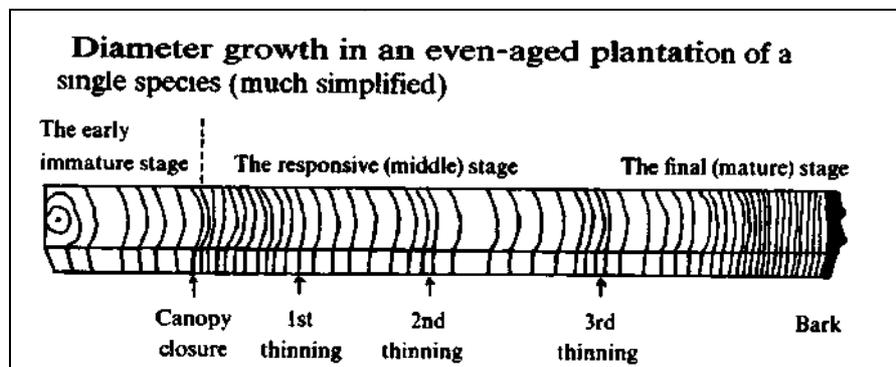


Figura 10.5. Bastoncillo de Pressler o core para medición de anillos de crecimiento

(tras realizarse claras, los crecimiento posteriores en diámetro aumentan, y en el período del final de la madurez los crecimientos se ralentizan ostensiblemente)(PHILIP, 1994).

Mediante este método se puede contabilizar el *tiempo de paso*, o tiempo que tarda un pie en aumentar en diámetro igual a la amplitud de la clase diamétrica (5 cm). Para ello, en el bastoncito mediremos el número de años (anillos) comprendidos en 2,5 cm, obteniéndose así la edad en la que el árbol tenía 5 cm menos que en la actualidad.

El crecimiento obtenido mediante bastoncitos será un crecimiento radial (cr) en el período de años que comprende la penetración de la barrena, u otro menor (p). El crecimiento diametral (Δd) será el doble del obtenido mediante este procedimiento.

$$\Delta d = \frac{2cr}{p}$$

p : n° de años del período.
 cr : crecimiento radial.

El período de tiempo a considerar en el cálculo del crecimiento diametral varía desde los 5 años para especies de crecimiento rápido hasta los 10 años para especies de crecimiento lento.

2. Análisis de troncos

Este método se basa en la corta y apeo del pie, siendo posteriormente analizado exhaustivamente el tronco del árbol cortado. Para ello, se hacen en el tronco trozas de entre 30 cm a 1 m de longitud, y en cada una de ellas se miden los diámetros, primero de fuera hacia dentro y luego de anillo en anillo. Se debe cortar una rodajilla muestra de la parte superior de cada troza (aproximadamente de 2 cm de anchura), en la que se cuentan los radios (con corteza y sin corteza) y los anillos de crecimiento que comprenden (figura 10.6):

Número de anillos	Altura desde el suelo	Diámetro en cm por edad											
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	103	m. R.
98	0,4	3,31	7,95	12,68	17,32	21,95	27,08	31,99	36,05	39,81	42,71	43,91	45,37
94	1,3	1,44	6,96	11,54	16,08	19,79	23,83	27,14	30,36	33,28	35,81	36,79	37,97
87	4,3		2,16	8,85	14,62	18,68	22,65	25,95	28,85	31,37	33,57	34,25	35,30
79	8,3			3,50	11,38	16,65	21,00	24,42	27,20	29,71	31,75	32,43	33,45
70	12,3				6,22	13,16	18,57	22,32	25,25	27,58	29,52	30,14	31,05
61	16,3					8,07	13,82	18,49	22,10	24,80	26,92	27,55	28,50
52	20,3					1,07	6,99	12,71	17,71	21,41	23,83	24,55	25,55
44	23,3						0,50	7,11	13,10	17,52	20,38	21,31	22,35
36	25,3							2,75	9,03	13,92	17,27	18,34	19,30
29	27,3								5,03	10,00	13,30	14,48	15,20
24	29,3								0,30	4,68	8,31	9,54	10,35
7	31,3										3,24	4,60	5,40
0	32,4												

Figura 10.6. Toma de datos en el análisis de troncos (PRODAN, 1997)

Uniéndolo gráficamente los radios de la sección con corteza obtendremos el perfil del árbol con corteza y sin corteza. De este modo es posible representar la variación d/h del individuo con toda su información (figura 10.7):

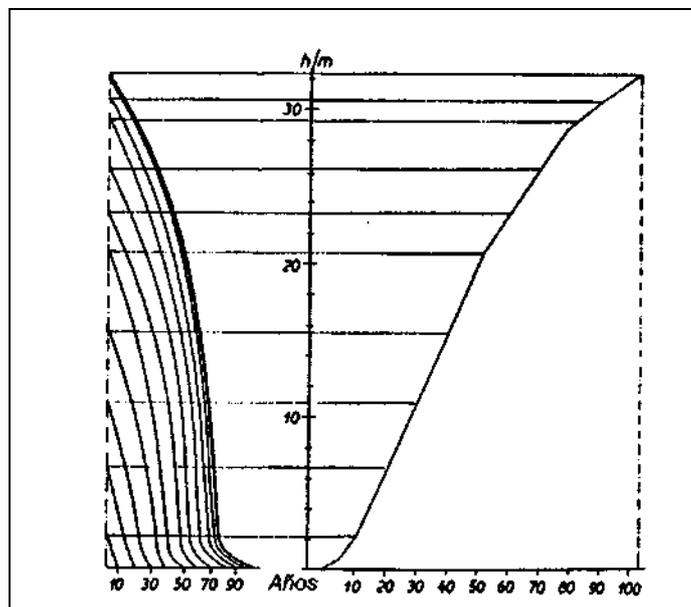


Figura 10.7. Representación de los valores h/d en un árbol tipo mediante análisis de troncos (PRODAN, 1997)

Cortar un árbol supone obtener la información de tantos árboles como años tenía el individuo; sin embargo la información así obtenida no incluye la variabilidad de la especie puesto que sólo contamos con un individuo real. Por ello es conveniente cortar varios pies de una misma clase diamétrica. Este método es

útil también para estimar cualquier tipo de parámetro dasométrico, pero es muy laborioso y caro.

10.5. CÁLCULO DEL CRECIMIENTO EN ALTURA

10.5.1. POR COMPARACIÓN DE INVENTARIOS

Se suponen conocidas la altura inicial, hace un determinado número de años (h_1) y la actual (h_2) de un determinado pie:

$$\Delta h = h_2 - h_1$$

10.5.2. MEDIANTE INVENTARIO ÚNICO

- **Mediante conteo de entrenudos.** Se supondrá que el árbol tiene una *metida* por año, contando el número de entrenudos o medidas anuales se podrá saber la altura a una terminada edad. Tiene el inconveniente de que a veces es complicado saber con certeza el número de medidas anuales
- **Mediante Análisis de troncos.** Aprovechando la información del análisis del tronco de pies apeados tal y como se comentó anteriormente

10.6. CÁLCULO DEL CRECIMIENTO EN VOLUMEN

10.6.1. POR COMPARACIÓN DE INVENTARIOS

- **Mediante cubicación del árbol en pie.** Dado que no es posible apeare el árbol para obtener su volumen en dos momentos distintos, se deberá cubicar éste en pie en dos años distintos que engloben un determinado período p . Se utilizará preferentemente aquel método de cubicación que ofrezca un menor error. Es aconsejable cubicar por trozas imaginarias aplicando reiteradamente la *fórmula de Huber* en los dos momentos diferentes.

$$\Delta V = V_2 - V_1$$

- **Aplicando una tabla de cubicación.** Debemos conocer la información de diámetro y alturas en dos momentos distintos.

$$\Delta V = \varphi(d_2, h_2) - \varphi(d_1, h_1)$$

Este método sin embargo no es aconsejable utilizarlo en un solo individuo, pues la estimación del volumen mediante tabla de cubicación sólo es válida si se utilizan en la estimación muchos individuos para que los errores se compensen y la misma tabla de cubicación.

10.6.2. MEDIANTE INVENTARIO ÚNICO

- **Mediante Análisis de troncos.** Utilizando la información del tronco de árboles tipo apeados. Supone la corta del pie al que es necesario evaluar el crecimiento en volumen. Los volúmenes a cualquier edad se obtendrán a partir de los correspondientes diámetros y alturas a las edades de referencia para el cálculo del crecimiento
- **Mediante tabla de cubicación.** Este método es válido más para un conjunto de pies que para un árbol individual. Se introducirá en el modelo los diámetros y alturas correspondientes a las edades de referencia de cálculo del crecimiento. Debemos conocer para ello el diámetro actual, la altura actual y una estimación del incremento de diámetro y de altura habidos en el inmediato pasado. Con estos datos se calculará ΔV :

$$\Delta V = \varphi(d, h) - \varphi(d - \Delta d, h - \Delta h)$$
$$\Delta V = \frac{\pi}{4} d^2 h - \frac{\pi}{4} (d - \Delta d)^2 (h - \Delta h)$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- HEYER, G. (1883). *Waldetragsregelung*. 3. Aufl. Von S. Heyre. Leipzig.
- MULLER, U. (1920). *Lehrbuch der Holzmeßkunde*. 2. Aufl. 1915;3. Aufl. Berlín.
- PARDE, J. and BOUCHON, J. (1994). *Dasometría*. Versión española de Dendrométrie. Traducido por Prieto Rodríguez, A. y López Quero, M. Ecoly Nationale des Eaux et Forêts (ENGREF). Nancy (Francia). Madrid: Edit. Paraninfo.
- PITA, P.A. (1979). *Dasometría (Tomos 1, 2 y 3)*. E.U.I.T. Forestal. Madrid.
- PHILIP, M. (1994). *Measuring trees and forests*. CAB International. Bristol. UK
- PRODAN, M. (1.951). *messung der waldbeständ*. j.d. Sauerländer´s verlag. Frankfurt-am-main. 259 pp.
- PRODAN, H., PETERS, R., COX, F. y REAL, P. (1997). *Mensura forestal*. Proyecto IICA/GTZ sobre Agricultura, Recursos Naturales y Desarrollo Sostenible. San José, Costa Rica

TEMA 11. CRECIMIENTO DE LA MASA FORESTAL

- I. INTRODUCCIÓN. DEFINICIÓN DE NUEVOS CONCEPTOS QUE SURGEN AL CONSIDERAR EL CRECIMIENTO DE LA MASA FORESTAL
 - II. CRECIMIENTO EN DIÁMETRO NORMAL Y ÁREA BASIMÉTRICA DE LA MASA FORESTAL
 - III. CRECIMIENTO EN ALTURA DE LA MASA FORESTAL
 - IV. CRECIMIENTO EN VOLUMEN DE LA MASA FORESTAL
 - V. ERRORES COMETIDOS EN LA ESTIMACIÓN DEL CRECIMIENTO EN VOLUMEN DE LA MASA FORESTAL
-

11.1. INTRODUCCIÓN. DEFICIÓN DE NUEVOS CONCEPTOS QUE SURGEN AL CONSIDERAR EL CRECIMIENTO DE LA MASA FORESTAL

Igual que hablamos de edad de un árbol también se podría definir la edad de la masa. En masas regulares se puede hablar con mayor propiedad de una edad de masa, por tanto, en estas masas tendrá sentido definir un crecimiento medio y un crecimiento corriente. En masas irregulares no se puede hablar de edad de la masa y sólo se podrán calcular crecimientos corrientes.

En primer lugar debemos distinguir entre producción y crecimiento de una masa forestal. *El crecimiento tiene como base el material inventariado al comienzo del período considerado: es el crecimiento del material inicial. La producción engloba el paso a fustal, que es la incorporación suplementaria que se ha producido entre los dos inventarios (BOURGENOT, 1951). Dicho de otro modo, se hablará de crecimiento de un conjunto de árboles y de la producción al nivel de un cantón. Intentaremos explicar estos conceptos a través de un ejemplo recogido en PARDÉ (1994):*

1. Inventario inicial: 1.000 árboles que cubican 1.000 m³
2. Inventario final: 950 árboles que cubican 1.100 m³
3. Corta y derribos por el viento intermedios: 150 árboles que cubican 100 m³
4. Producción de inventario a inventario: 1.100 + 100 – 1.000 = 200 m³
5. Pies que pasan a fustal: 950 + 150 – 1.000 = 100 árboles
6. Si estos 100 árboles, por medio de una tarifa y para la clase diamétrica inferior, cubican 20 m³, el crecimiento de la masa inicial no será más que de:

$$200 \text{ m}^3 - 20 \text{ m}^3 = 180 \text{ m}^3$$

En realidad, la noción con diferencia más importante en la práctica forestal es la del crecimiento en volumen de la masa. Para poder calcular el crecimiento es necesario previamente indicar algunas definiciones generales:

- Producción total por hectárea: es la contabilizada desde el origen de una masa hasta una edad determinada. También puede referirse a la unidad de tiempo, en cuyo caso obtendríamos el crecimiento medio anual. Se trata de un concepto aplicable tanto a pies individuales como a masas

- Producción en un periodo: referida solamente a la masa, indica lo que han crecido los pies inventariados al principio del período junto con las incorporaciones habidas durante el mismo (CBV)
- Crecimiento: tanto para árboles como para masas, indica el aumento de la magnitud de un pie, en los pies inventariados al principio del período. El crecimiento se puede definir bajo varios conceptos que se exponen a continuación

En una determinada superficie siempre se producen variaciones en los individuos debido a la regeneración, cortas y mortalidad natural. En esta superficie deberemos elegir un número de parámetros que estén muy relacionados con las variaciones de la masa. Nos vamos a referir siempre a la masa inventariable, esto es: $d_N > 7,5$ cm para especies de crecimiento rápido y $d_N > 12,5$ cm para especies de crecimiento lento o medio

Cuando hablamos de crecimiento de la masa forestal nos estamos refiriendo a la variación de uno de sus parámetros dentro de un intervalo de tiempo, t_1 y t_2 . Pues bien, en un determinado periodo de tiempo se pueden distinguir los siguientes tipos de masas:

- Masa principal: la constituyen aquellos pies de dimensiones inventariables al principio del período
- Masa extraída: aquellos pies que durante el período son cortados o mueren por causas naturales y eran inventariables al principio del período
- Masa incorporada: la constituyen los pies que al inicio del período no eran inventariables, pero después han adquirido las dimensiones que los hacen inventariables
- Vuelo: lo constituyen aquellos pies que eran inventariables al principio del período, más las aportaciones de pies inventariables a lo largo del período y que al principio no lo eran

La existencia de estos nuevos conceptos introducidos dará lugar a que, cuando pretendamos calcular crecimientos de la masa (absolutos y relativos) habrá que especificar cuales son los pies a los que hace referencia el crecimiento propuesto. Así por ejemplo, cuando pretendemos calcular crecimientos periódicos deberemos especificar si se trata de un crecimiento "bruto del vuelo", "bruto de la masa principal", "neto del vuelo" ó "neto de la masa principal".

Las definiciones de crecimiento así contempladas son las siguientes:

- **CBV (crecimiento bruto del vuelo):**

$$CBV = (V_2 + V_e) - V_1$$

Esta definición de crecimiento ofrece información acerca de la producción total o máxima en el monte

- **CBP (crecimiento bruto de la masa principal):**

$$CBP = (V_2 + V_e) - (V_1 + V_i) = CBV - V_i$$

El crecimiento así calculado nos indicará el crecimiento total habido en un monte

- **CNV (crecimiento neto del vuelo):**

$$CNV = V_2 - V_1 = CBV - V_e$$

Es una estimación de la producción en pie

- **CNP (crecimiento neto de la masa principal):**

$$CNP = V_2 - (V_1 + V_i) = CNV - V_i = CBP - V_e$$

Es una estimación del crecimiento en pie

Siendo:

- V₂: masa principal al final del período
- V₁: masa principal al principio del período
- V_e: masa extraída durante el período
- V_i: masa incorporada durante el período

B (bruto) ó N (neto) aluden a la inclusión, o no, respectivamente, de la masa extraída. V (vuelo arbóreo) o P (masa principal) incluyen, o no, respectivamente, a la masa incorporada. La masa al final del período, V₂, incluye la masa inventariable al principio del período (V₁), menos la masa extraída (V_e), más el crecimiento experimentado por esta masa (V₁ - V_e) y la masa que se ha ido incorporando durante el período (V_c) (figura 11.1):

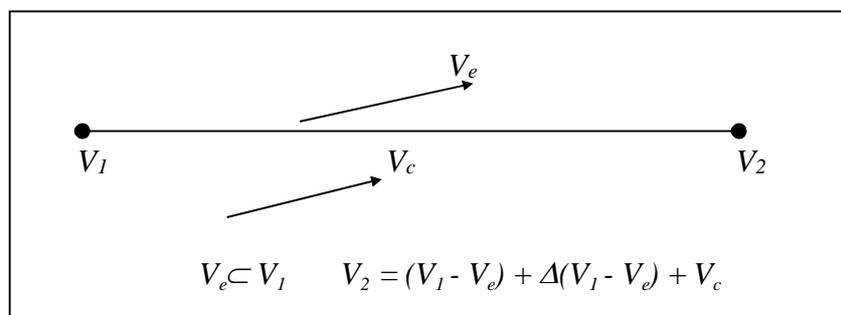


Figura 11.1. Diversos conceptos de cálculo del crecimiento de la masa

11.2. CRECIMIENTO EN DIÁMETRO NORMAL Y ÁREA BASIMÉTRICA DE LA MASA FORESTAL

11.2.1. INTRODUCCIÓN

El concepto de crecimiento en diámetro normal de la masa no hace referencia a las diferencias de frecuencias por clases diamétricas entre el inventario 1 y 2, sino que se fundamenta en el incremento medio en diámetro ($\Delta\bar{d}$) de todas las clases diamétricas de la masa, o bien en el incremento de diámetro (Δd) de cada una de las clases diamétricas. En cualquier caso resulta muy útil ajustar una expresión que ligue diámetros normales y sus crecimientos, esto es:

$$\Delta d = f(d)$$

Si existe una relación significativa entre Δd y d es posible, mediante análisis de regresión, asignar Δd a cada clase diamétrica eligiendo una muestra de pies a la que medimos Δd y d .

También es necesario distinguir entre crecimiento anterior y posterior, puesto que los pies utilizados para el cálculo son distintos y están en posiciones sociológicas y de edad diferentes. Por ejemplo, para un árbol de 25 cm tendremos los siguientes crecimientos (figura 11.2):

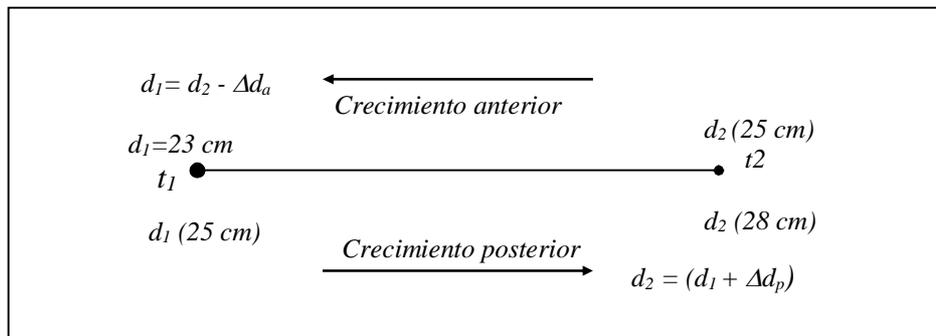


Figura 11.2. Conceptos de crecimiento anterior y posterior

- El crecimiento anterior sería el crecimiento habido durante el periodo suponiendo que al final tiene los 25 cm de diámetro
- El crecimiento posterior es el crecimiento de un árbol que tenía al inicio del periodo los 25 cm de diámetro

El crecimiento en diámetro de una masa puede referirse a una tasa de índice de crecimiento (TIC). El TIC se calcula como la relación entre el crecimiento medio periódico (anterior o posterior) de una clase de diamétrica, y la amplitud de la clase diamétrica. Este ratio de crecimiento indica de forma aproximada el tanto por uno de individuos que han cambiado de clase diamétrica durante el período considerado:

$$TIC_{d_i} = \frac{CP_{clase d_i}}{amplitud (cm)}$$

Por ejemplo, con un crecimiento periódico de 1,21 y $TIC = \frac{1,21}{5} = 0,242$, significa que habrían cambiado de clase el 24,2% del total de los pies de la clase diamétrica.

Globalmente, los métodos utilizados para calcular el crecimiento en diámetro de la masa forestal son los siguientes:

- Mediante comparación de inventarios
 - ✓ Por árboles numerados
 - ✓ Por árboles sin numerar
- Mediante inventario único
 - ✓ Por bastoncitos Pressler

A continuación se explican detalladamente cada uno de ellos.

11.2.2. CRECIMIENTO DEL DIÁMETRO DE LA MASA POR COMPARACIÓN DE INVENTARIOS

El método de comparación de inventarios requiere que se realice la medición diamétrica sobre unos mismo árboles y en condiciones en las que se puedan comparar esas mediciones, esto es, a la misma altura y con la misma orientación en el tronco del árbol. La diferencia radica en que con árboles numerados se sabe la diferencia entre los dos valores medidos por árbol, mientras que si los árboles no están numerados sólo es posible comparar los valores medios.

1.1. Mediante árboles numerados. Es un procedimiento poco habitual y se necesita de una parcela permanente. Un número de pies que están identificados y numerados se miden en los dos inventarios pudiéndose apreciar lo que han crecido en el periodo entre los dos inventarios. Se puede calcular también el crecimiento anterior y el posterior.

1.2. Mediante árboles sin numerar. Es el procedimiento más habitual y se emplea la *hipótesis de Ferguson*, que supone que los árboles mayores proceden de las clases mayores pudiéndose confeccionar la tabla a partir de los diámetros mayores disminuyendo en tamaño.

La masa incorporada será: $N_c = N_2 + N_e - N_1$

11.2.3. CRECIMIENTO DEL DIÁMETRO DE LA MASA MEDIANTE INVENTARIO ÚNICO

Se realiza mediante conteo de anillos en *bastoncitos Pressler*. Se parte de la información referente a la distribución diamétrica de la masa y es necesario predecir el estado futuro de la masa en un próximo periodo. Para ello, con la información aportada

por los bastoncillos es posible ajustar la curva $\Delta d / d$ y ofrecer un crecimiento futuro por clase. Con esta regresión se podría determinar también el tiempo de paso.

La expresión puede ajustarse mediante mínimos cuadrados y puede referirse a un crecimiento anterior o posterior. El modelo suele ser lineal y dependerá de la estructura y de la densidad de la masa:

$$\Delta d = a_0 + a_1 d \rightarrow \text{para crecimiento posterior}$$

$$\Delta d = b_0 + b_1 (d - \Delta d) \rightarrow \text{para crecimiento anterior}$$

El crecimiento así obtenido se refiere al diámetro sin corteza. Si ello fuera interesante de obtener, habría que añadir experiencias de crecimiento de espesores de corteza.

11.3. CRECIMIENTO EN ALTURA DE LA MASA FORESTAL

Debemos distinguir en este apartado los métodos aplicables a masas regulares de los que pueden definirse para las masas irregulares:

A. Métodos para masas regulares

A.1. Crecimiento en altura mediante comparación de inventarios. Podrá estimarse mediante los dos siguientes procedimientos:

1.1. Con árboles numerados

1.2. Con árboles sin numerar

A.2. Crecimiento en altura mediante inventario único. Conocido el diámetro medio cuadrático, d_g , y la curva h/d , se podrá obtener la altura correspondiente a ese diámetro, h_g , suponiendo que la curva no ha variado mucho en el tiempo; entonces, por diferencia, podría determinarse Δh_g . Es aplicable este procedimiento para períodos pequeños, puesto que la curva h/d como sabemos es variable en el tiempo en masas regulares. También podría estimarse este crecimiento por conteo de entrenudos en una serie de árboles muestra de la masa, calculándose un Δh medio por clase y total.

B. Métodos para masas irregulares

Se procederá igual que para masas regulares, con la ventaja de que la curva h/d es constante en el tiempo.

11.4. CRECIMIENTO EN VOLUMEN DE LA MASA FORESTAL

11.4.1. INTRODUCCIÓN

Igualmente que en los casos de crecimientos diametrales o en altura, se podrá estimar este crecimiento mediante los 2 siguientes grandes procedimientos:

1. Crecimiento en volumen mediante comparación de inventarios

Se estimará el crecimiento mediante árboles sin numerar, preferiblemente en parcelas permanentes, ya que se cometerá en este caso un menor error

2. Crecimiento en volumen mediante inventario único. Se estimará el volumen mediante los siguientes procedimientos:

- 1.3. Mediante tablas y tarifas de cubicación
- 1.4. Mediante tarifa constante de ordenación
- 1.5. Mediante cálculo del crecimiento relativo

11.4.2. CRECIMIENTO EN VOLUMEN MEDIANTE INVENTARIO ÚNICO

Las tarifas y tablas de cubicación permiten conocer una estimación de los crecimientos. Si bien los resultados obtenidos podrían ser más imprecisos que los métodos anteriores, no es menos cierto que su empleo es más rápido y económico.

Sabemos que las fórmulas de cubicación relacionan el volumen del árbol con el diámetro normal d y la altura total h mediante funciones del tipo $V = f(d, h)$. Si conociéramos los valores de los diámetros del árbol en el instante inicial y final, podría conocerse por diferencia el incremento habido en un período. Ello sería una estimación del crecimiento mediante comparación de inventarios:

$$\Delta V_1^2 = f(d_2, h_2) - f(d_1, h_1)$$

Si deseáramos determinar el incremento en volumen mediante inventario único y tablas de cubicación, deberíamos conocer como mínimo el crecimiento en el inmediato pasado de las variables diámetro y altura. De esta forma, se podría proyectar el crecimiento futuro en función de estos datos mediante una única muestra independiente. A tal efecto, es útil la aplicación del desarrollo en serie de Taylor (PITA, 1979):

$$V = f(d + \Delta d, h + \Delta h) - f(d, h)$$

La resolución analítica de esta expresión para cada clase diamétrica es la siguiente:

$$\Delta V = \frac{\delta V}{\delta d} \Delta d + \frac{\delta V}{\delta h} \Delta h + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta^2 V}{\delta d^2} (\Delta d)^2 + \frac{\delta^2 V}{\delta h^2} (\Delta h)^2 + 2 \frac{\delta^2 V}{\delta d \delta h} \right) + \dots$$

Por ejemplo, supongamos la siguiente expresión de variable combinada para el cálculo del volumen:

$$V = a_0 + a_1 d^2 h$$

Las sucesivas derivadas parciales no nulas de la tabla son las siguientes:

$$\frac{\delta V}{\delta d} = 2a_1 dh$$

$$\frac{\delta V}{\delta h} = a_1 d^2$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta d^2} = 2a_1 h$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta d \delta h} = 2a_1 d$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta h^2} = 0$$

$$\Delta V = a_1 d^2 h \left(2 \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta h}{h} + \left(\frac{\Delta d}{d} \right)^2 + 2 \frac{\Delta d}{d} \times \frac{\Delta h}{h} \right)$$

En la expresión anterior es posible prescindir de los dos últimos sumandos frente al valor de los primeros, por tanto:

$$\Delta V \approx a_1 d^2 h \left(2 \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta h}{h} \right)$$

En la última expresión se aprecia cómo el crecimiento en volumen del árbol depende del coeficiente a_1 de la fórmula de cubicación, de los valores del diámetro normal y altura, y de sus respectivos crecimientos.

Crecimiento en volumen de la masa por inventario único y tarifa constante de ordenación

Ya que en masas irregulares se observa la estabilidad de la relación h/d a lo largo del tiempo, para este tipo de masas puede considerarse la hipótesis de que una tarifa de ordenación del tipo $V = f(d)$ permanecerá también constante dentro de un período.

En masas regulares la curva h/d si varía con el tiempo, por tanto es previsible que el modelo $V = f(d)$ también cambie con el tiempo.

La forma general de una tarifa de ordenación completa corresponde a una parábola completa de segundo grado:

$$V = a_0 + a_1 d + a_2 d^2$$

La expresión del incremento en volumen puede obtenerse mediante la aplicación del desarrollo en serie de Taylor para funciones de una única variable:

Clase diamétrica (cm)	Frecuencias (Pies/ha)	C.C.A. unitario (m ³)	C.C.A. total acumulado (m ³ /ha)
10	n_1	ΔV_1	$n_1 \times \Delta V_1$
15	n_2	ΔV_2	$n_2 \times \Delta V_2$
20	n_3	ΔV_3	$n_3 \times \Delta V_3$
⋮	⋮	⋮	⋮
Total	N		ΔV_{TOTAL} (m ³ /ha)

$$\Delta V = f(d + \Delta d) - f(d) = f'(d)\Delta d + \frac{1}{2} f''(d)(\Delta d)^2 + \dots$$

Sustituyendo los valores de las derivadas parciales en la expresión de Taylor se obtendrá:

$$\Delta V = (a_1 + 2a_2 d)\Delta d + a_2(\Delta d)^2$$

De esta manera, el incremento en volumen podría obtenerse mediante los coeficientes de la tarifa de ordenación y de una muestra representativa de crecimientos diametrales, obtenida muestreando suficiente número de árboles en parcelas distribuidas por todo el monte. Por cada clase podrían determinarse una media de los crecimientos obtenidos.

No obstante, disponiendo de una muestra amplia de diámetros normales o de un conteo diamétrico completo, se podrían relacionar los crecimientos unitarios en volumen con los valores centrales de cada clase diamétrica, a través de los coeficientes de la tarifa de ordenación y de las medias de los crecimientos diametrales, obtenidos por muestras directas o por estimación mediante la regresión $\Delta d = f(d)$.

Por ejemplo, sea la tarifa de ordenación (PITA, 1979):

$$V = 68,651 - 11,525d + 0,97496d^2$$

Y la relación entre el crecimiento diametral con respecto a los diámetros:

$$\Delta d = 0,5094 + 0,0167d^2$$

La expresión del cálculo del volumen será la siguiente:

$$\Delta V = (-11,525 + 2 \times 0,97496d) \times (0,5094 + 0,0167d^2) + 0,97496 \times (0,5094 + 0,0167d^2)^2$$

Con esta expresión se construirá una tabla en la que se calculará el incremento volumétrico unitario y acumulado por clase diamétrica:

Cuando no se dispone de una expresión matemática para el volumen, pero se conocen los volúmenes unitarios por clase diamétrica, se procederá admitiendo que los crecimientos en volumen son proporcionales al crecimiento diametral para

una misma clase diamétrica. Así para una clase diamétrica i de amplitud 5 cm se tendrá que:

$$\Delta V_i = \left(\frac{V_{i+5} - V_{i-5}}{10} \right) \times \Delta d_i$$

V_{i+5} y V_{i-5} serán los volúmenes dados por la tarifa en las clases diamétricas $(i+5)$ y $(i-5)$ cm y Δd_i es el crecimiento en diámetro de la clase i , calculado por una media de crecimientos diametrales en árboles muestra por clase, o por predicción en la regresión $\Delta d = f(d)$. Para el caso concreto de una tarifa $V = f(d)$ se puede utilizar adicionalmente el siguiente procedimiento:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{d(d)} \times \frac{d(d)}{dt} = \frac{dV}{d(d)} \times c.c. \text{diámetro}$$

Crecimientos relativos en volumen

La metodología que proponemos es muy adecuada para determinar el crecimiento volumétrico disponiendo de tablas y tarifas del tipo exponencial o potencial, como las de fórmulas de Meyer o de Schumacher:

$$V = ad^b h^c$$

$$V = ad^b$$

Sea la tabla de cubicación siguiente:

$$V = ad^b h^c$$

Tomaremos logaritmos neperianos en ambos miembros de la expresión:

$$\ln V = \ln a + b \ln d + c \ln h$$

En este caso se podría derivar la expresión sin necesidad de recurrir al desarrollo en serie de Taylor:

$$\frac{dV}{V} = b \frac{dd}{d} + c \frac{dh}{h}$$

Tomando incrementos finitos quedaría:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx b \frac{\Delta d}{d} + c \frac{\Delta h}{h}$$

De esta expresión se deduce que podríamos determinar el crecimiento en volumen a través de los coeficientes de la fórmula de cubicación y de los crecimientos en altura y diámetro. Por definición, el crecimiento relativo en volumen se obtendrá directamente en función de los mismos exponentes, a

través de los crecimientos relativos en diámetro y altura, ya que el crecimiento volumétrico relativo es precisamente $\frac{\Delta V}{V}$:

$$p_v = bp_d + cp_h$$

El mismo procedimiento es aplicable a una tarifa exponencial de cubicación de la forma $V = ad^b$:

$$\ln V = \ln a + b \ln d \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = b \frac{\Delta d}{d}$$

$$p_v = bp_d$$

11.5. ERRORES COMETIDOS EN EL CÁLCULO DEL CRECIMIENTO EN VOLUMEN

El crecimiento de una masa forestal se refiere a las ganancias habidas en el material inventariable desde el momento inicial hasta el momento final (CBP). La producción incluye además el paso a fustal, es decir, los individuos incorporados durante el periodo. Existen diversos errores en la estimación del crecimiento. Los dividiremos en función de método elegido para el cálculo:

1. Errores en la estimación del crecimiento por comparación de inventarios: Cometeremos dos tipos de errores:

A) Errores sistemáticos. Normalmente son desconocidos y debidos a una mala elección de la tarifa, mediciones incorrectas, falta de calibración de los aparatos, etc. Estos errores se suelen acumular desde la propia estimación de los volúmenes y se transmiten a las fórmulas del crecimiento. En la mayoría de los casos son errores desconocidos y muy difícil(s) de estimar

B) Errores aleatorios (o de muestreo). Son debidos a los métodos de trabajo, errores del muestreo, etc. Para calcular el error aleatorio en la estimación de un crecimiento deberemos determinar el error aleatorio cometido en la estimación de los volúmenes en los instantes inicial y final (V_1 y V_2). Así, se definen los siguientes errores:

$E_1 \Rightarrow$ error absoluto cometido en la estimación de V_1

$E_2 \Rightarrow$ error absoluto cometido en la estimación de V_2

$E_3 \Rightarrow$ error absoluto cometido en la estimación de la diferencia $V_2 -$

V_1

Según la teoría de errores, si V_2 y V_1 son mediciones independientes, entonces el error de la diferencia será:

$$\pm E_3 = \pm \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$$

Los errores relativos cometidos en ambos casos serán:

$$\pm e_1 = \pm \frac{E_1}{V_1}$$

$$\pm e_2 = \pm \frac{E_2}{V_2}$$

Por lo que el error relativo de la diferencia se calculará como:

$$\pm e_3 = \pm \frac{\sqrt{E_2^2 + E_1^2}}{V_2 - V_1}$$

Suponiendo que los errores relativos cometidos en V_2 y V_1 son iguales (PRODAN, 1997) tendremos que:

$$e_1 = e_2 = e$$

$$\pm E_3 = \pm \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \pm \sqrt{e^2 \times V_2^2 + e^2 \times V_1^2} = \pm \sqrt{e^2 (V_2^2 + V_1^2)}$$

$$\pm E_3 = \pm e \sqrt{V_2^2 + V_1^2}$$

Y el error relativo de la diferencia será:

$$\boxed{\pm e_3 = \pm \frac{e \sqrt{V_2^2 + V_1^2}}{V_2 - V_1}}$$

Para conocer el peso de los errores individuales de los volúmenes en el error total, calcularemos los errores relativos como porcentaje del volumen en cada instante.

Por definición de error relativo en porcentaje: $e(\%) = \frac{E}{V} \times 100$

$$\pm E_3 = \pm \sqrt{E_2^2 + E_1^2} = \pm \sqrt{\frac{e_2^2(\%) \times V_2^2}{100^2} + \frac{e_1^2(\%) \times V_1^2}{100^2}}$$

Consideraremos que $e_2 = e_1 \Rightarrow e_2(\%) = e_1(\%)$

$$\pm E_3 = \pm \frac{1}{100} \sqrt{e^2(\%) \times V_1^2 + e^2(\%) \times V_2^2}$$

Factorizando en función de $e(\%)$:

$$\boxed{\pm E_3 = \frac{\pm e(\%)}{100} \sqrt{V_1^2 + V_2^2}}$$

Sabemos además por definición que:

$$\pm e_3(\%) = \pm \frac{E_3}{V_2 - V_1} \times 100$$

Sustituyendo:

$$\pm e_3(\%) = \pm \frac{\frac{\pm e(\%)}{100} \sqrt{V_1^2 + V_2^2}}{V_2 - V_1} \times 100$$

Finalmente obtendremos una expresión para el cálculo del error relativo en el crecimiento de la masa:

$$\pm e_3(\%) = \pm \frac{\pm e(\%) \sqrt{V_2^2 + V_1^2}}{V_2 - V_1}$$

Según la expresión deducida, se aprecia como el error relativo en crecimiento en volumen aumenta proporcionalmente con el error relativo cometido en la estimación del volumen, y disminuye cuanto mayor es el crecimiento en volumen habido. Además, la precisión aumentará cuando más grande sea el periodo de cálculo.

- ✓ Si $e(\%) \uparrow \Rightarrow \uparrow e_3(\%)$
- ✓ Si $V_2 - V_1 \uparrow \Rightarrow \uparrow e_3(\%)$
- ✓

2. Errores en muestreos con reemplazamiento. Este caso es el de muestreos en parcelas independientes en cada inventario; el error cometido $-e_3(\%)$ - en este caso se dispara, porque el valor que obtenemos de $e(\%)$ normalmente suele ser elevado.

$$\varepsilon = \pm t \times S_{\Delta V} = \pm t \sqrt{\frac{S_{\Delta V}^2}{n}} = \pm t \sqrt{\frac{S_{V_2}^2 + S_{V_1}^2 - 2S_{V_{12}}}{n}} = \pm t \sqrt{\frac{S_{V_2}^2 + S_{V_1}^2}{n}} = \sqrt{e_1^2 + e_2^2}$$

3. Errores en los muestreos sin reemplazamiento. Son muestreos dependientes, es decir, disponemos de la misma muestra en ambos inventarios mediante parcelas permanentes. En este caso el error en la estimación del crecimiento viene dado por la siguiente expresión:

$$\varepsilon = \pm t \times S_{\Delta V} = \pm t \sqrt{\frac{S_{V_2}^2 + S_{V_1}^2 - 2S_{V_{12}}}{n}}$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

PARDE, J. and BOUCHON, J. (1994). *Dasometría*. Versión española de Dendrométrie. Traducido por Prieto Rodríguez, A. y López Quero, M. Ecoly Nationale des Eaux et Forêts (ENGREF). Nancy (Francia). Madrid: Edit. Paraninfo.

PITA, P.A. (1979). *Dasometría (Tomos 1, 2 y 3)*. E.U.I.T. Forestal. Madrid.

PRODAN, H., PETERS, R., COX, F. y REAL, P. (1997). *Mensura forestal*. Proyecto IICA/GTZ sobre Agricultura, Recursos Naturales y Desarrollo Sostenible. San José, Costa Rica